

Problèmes inverses pour l'estimation de bathymétrie dans un réseau de rivières

Iain HENDERSON, Fédération ENAC ISAE-SUPAERO ONERA - Toulouse, France

Jessie LEVILLAIN, CNES & INSA-IMT - Toulouse, France

Jérôme MONNIER, INSA-IMT - Toulouse, France

On s'intéresse à la reconstruction de bathymétrie dans un modèle en réseau, à partir de mesures en surface de la hauteur d'eau de rivières, par exemple à l'aide de données satellites altimétriques. C'est un problème crucial dans l'estimation des ressources et flux en eau sur Terre, en particulier pour des problèmes socio-économiques tels que le changement et la prédiction climatique [1], ou le suivi des ressources en eau.

Ici, le réseau de rivières est composé de N branches interconnectées, modélisées par un graphe non orienté $\mathcal{G} = (X, \Omega)$ avec X les extrémités de chaque branche. Le domaine complet est délimité par Ω , et divisé en sous-domaines Ω_i , où Ω_i permet de paramétriser la branche i . On considère que toutes les branches $i \neq 1$ rejoignent la branche 1, qui termine le plus en aval. L'eau dans chaque branche $i \in \{1, \dots, N\}$ vérifie l'équation linéaire stationnaire

$$-\Lambda_{ref}(b)(i; x) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(i; x) + \frac{\partial H}{\partial x}(i; x) = \frac{\partial b}{\partial x}(i; x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

où H est la hauteur d'eau, b la bathymétrie et avec $\Lambda_{ref}(b) \equiv \Lambda(H_{ref}, b) = \frac{3}{10} \frac{(H_{ref}(x) - b(x))}{|\partial_x H_{ref}(x)|}$.

Pour chaque branche i , on complète cette équation par des conditions aux limites et de continuité suivantes

$$\begin{cases} H(i; 0) = H^{i, in} \text{ for } i \in \{1, \dots, N\} \text{ et } H(1; L) = H^{1, out}, \\ H(i; \cdot)|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = H(j; \cdot)|_{\Omega_i \cap \Omega_j}, \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, N\}, \Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset. \end{cases} \quad (2)$$

On souhaite résoudre le problème inverse suivant : *Pour des mesures $H^{obs}(x, t)$ données, estimer la bathymétrie sur le réseau $b(x)$.*

Après avoir introduit le contexte menant à la dérivation de ces équations puis montré que le problème inverse est mal posé, on s'intéressera ensuite aux méthodes de résolution ainsi qu'au choix d'un prior afin de trouver la "bonne" solution à notre problème. On introduira notamment des méthodes d'assimilation de données variationnelles basées sur [2] qui permettent, étant donnée une fonction de coût $j_\alpha(b) = J_\alpha(H, b)$ de résoudre le problème d'optimisation $b_\alpha^* = \arg \min_b j_\alpha(b)$. La construction de la fonction de coût nous permettra non seulement de prendre en compte la distance aux observations, mais aussi un terme de régularisation lié à la physique du problème via un opérateur de covariance bien choisi.

- [1] V. Masson-Delmotte, P. Zhai, H.-O. Pörtner, D. Roberts, J. Skea, P. R. Shukla, et al. *Global Warming of 1.5 C : IPCC special report on impacts of global warming of 1.5 C above pre-industrial levels in context of strengthening response to climate change, sustainable development, and efforts to eradicate poverty*. Cambridge University Press, 2022.
- [2] L. Pujol, P.-A. Garambois, P. Finaud-Guyot, J. Monnier, K. Larnier, R. Mosé, S. Biancamaria, H. Yesou, D. Moreira, A. Paris, S. Calmant. *Estimation of multiple inflows and effective channel by assimilation of multi-satellite hydraulic signatures : The ungauged anabranching negro river*. Journal of Hydrology, **591**, 125331, 2020.