Stabilité et contrôle optimal du système chémostat avec perturbation

Claudia ALVAREZ-LATUZ, Laboratoire de Mathématiques d'Avignon - Avignon
Térence BAYEN, Laboratoire de Mathématiques d'Avignon - Avignon
Jérôme COVILLE, BIOSP, INRAE Avignon - Avignon

Cet exposé porte sur le système chémostat perturbé avec $n \geq 1$ espèces en compétition sur un même substrat :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(s(t))x(t) - u(t)x(t) + h(x(t), s(t), \varepsilon), \\ \dot{s}(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j(s(t))}{Y_j} + u(t)(s_{in} - s(t)). \end{cases} \tag{1}$$

Dans ce système le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne la concentration des espèces, $s(t)$, la concentration du substrat, $u(t)$ le taux de dilution, $s_{in} > 0$, la concentration en substrat entrant, et pour $1 \leq j \leq n$, $Y_j > 0$ désigne le taux de rendement de l'espèce j et $\mu_j(\cdot)$ la fonction de croissance de l'espèce j relativement au substrat. Enfin, $D(s) := \mathrm{diag}(\mu_1(s), ..., \mu_n(s))$. La nouveauté est la prise en compte d'un terme de perturbation modélisé par la fonction $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ qui représente un terme d'échange entre les espèces (mutation par transfert de gène par exemple). Le paramètre de perturbation $\varepsilon > 0$ représente un taux d'échange entre les espèces. Dans cet exposé, on s'intéresse d'abord à la stabilité de (1) lorsque $t \mapsto u(t)$ est constant. On présentera un résultat de stabilité pour ce système (voir [1, Théorème 2.4]) et qui généralise un premier résultat dans ce sens établi dans [2]. Pour obtenir un tel résultat, nous utilisons le théorème de Malkin-Gorshin (voir [4]) et un résultat de stabilité globale pour les systèmes dynamiques perturbés établi par Smith et Waltman [5]. Enfin, dans la continuation de [3], nous étudierons le contrôle optimal de (1) (la variable de contrôle étant $t \mapsto u(t)$) afin de maximiser la production des espèces

$$\int_0^T u(t) \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \, \mathrm{d}t,$$

sur un horizon fini et sous une contrainte terminale du type $S(x(T)) \leq \alpha$ (où $\alpha > 0$) qui traduit le maintien de la biodiversité dans le pool d'espèces mises en jeu.

Références

[1] C. Alvarez-Latuz, T. Bayen, J. Coville, *Global stability of perturbed chemostat systems*, preprint 2025 `arXiv:2501.08011`.

[2] T. Bayen, H. Cazenave-Lacroutz, J. Coville, *Stability of the chemostat system including a linear coupling*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, vol. 28, 3, pp. 2104–2129, 2023.

[3] T. Bayen, J. Coville, F. Mairet, *Stability of the chemostat system including a linear coupling*, Optimal Control Appl. Methods, vol. 44, 6, pp. 3342–3360, 2023.

[4] T. Sari, B.S. Kalitin *B-stability and its applications to the Tikhonov and Malkin-Gorshin theorems*, Differential Equations, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, Edinburgh, vol. 37, pp. 11–16, 2001.

[5] H.L. Smith, P. Waltman, *Perturbation of a globally stable steady state*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 127, 2, pp. 447–453, 1999.

Contact : `terence.bayen@univ-avignon.fr`