

Méthode numérique multi-échelle pour les équations de réaction-diffusion à coefficients oscillants

Albéric LEFORT, ENPC, Inria - Champs-sur-Marne

Claude LE BRIS, ENPC, Inria - Champs-sur-Marne

Frédéric LEGOLL, ENPC, Inria - Champs-sur-Marne

Mots-clés : *Problème de réaction-diffusion, méthode des éléments finis multi-échelles, homogénéisation, problème aux valeurs propres.*

Nous étudions théoriquement et numériquement plusieurs approches pour approximer la solution du problème aux valeurs propres de l'équation de réaction-diffusion à coefficients oscillants

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon u_\varepsilon - \varepsilon^2 \operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où A_ε et σ_ε sont des coefficients hautement oscillants, supposés périodiques pour nos résultats théoriques. L'inconnue est le couple $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ de la première valeur propre et du vecteur propre associé pour l'équation (1). On s'intéressera au cas où le problème est scalaire et au cas où le problème est à valeur vectorielle. Ce second cas apparaît en particulier pour modéliser le flux de neutrons à plusieurs niveaux d'énergie dans le cœur d'un réacteur nucléaire en régime permanent, où les coefficients oscillants décrivent l'hétérogénéité d'échelle caractéristique ε du domaine. Chaque composante de u_ε représente le flux de neutrons d'un niveau d'énergie donné.

Le problème étant multi-échelle, l'approximation numérique de la solution par des méthodes standards est trop coûteuse. Ici, nous mettons en œuvre une approche numérique utilisant la méthode des éléments finis multi-échelles ("MsFEM"), qui est une approche de discrétisation de Galerkin utilisant des fonctions de base pré-calculées, bien adaptées au problème d'intérêt. Ces fonctions de base sont définies comme les solutions de problèmes locaux, la difficulté consistant à trouver les bons problèmes locaux à résoudre. L'avantage de cette méthode repose sur le fait qu'une fois les fonctions de base précalculées, le couple $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ peut être obtenu en très peu de temps. De plus, les mêmes fonctions de base peuvent être utilisées pour calculer efficacement n'importe quel couple de valeurs propres/vecteurs propres de (1). Dans cet exposé, nous montrons comment utiliser les résultats théoriques de l'homogénéisation dans un cadre périodique pour guider l'intuition dans la construction des fonctions de base. Nous présentons une approche, à la fois pour le cas scalaire et le cas vectoriel, et illustrons numériquement son efficacité pour l'approximation de (1).

Références :

- [1] G. Allaire and Y. Capdeboscq, *Homogenization of a spectral problem in neutronic multigroup diffusion*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 187 (2000) 91-117.
- [2] Y. Efendiev, T. Hou, *Multiscale Finite Element Method : Theory and Applications*, Surveys Tutoriels Appl. Math. Sci. 4, Springer, New York, 2009.