

Le triangle magique et autres histoires

Ludovic MORIN, LaBRI - Bordeaux

L'étude de la probabilité $P_K(n)$ que n points tirés uniformément et indépendamment dans un domaine convexe K d'aire 1 (dans le plan) soient en position convexe, c'est-à-dire forment l'ensemble des sommets d'un polygone convexe, remonte à la fin du 19e siècle et la conjecture de Sylvester pour 4 points, qui fut résolue par Blaschke en 1917. Depuis, des résultats plus généraux se sont succédé lorsque K est un parallélogramme [7], un triangle [8], un disque [5, 4], ainsi que d'autres résultats asymptotiques [1, 2, 6]. En particulier, un résultat étonnant dû à Bárány et al. [3] de 1999 donne la probabilité exacte que n points i.i.d. uniformes dans un triangle forment une chaîne convexe entre deux sommets choisis (i.e. les n points forment les sommets de l'enveloppe convexe des n points avec deux sommets du triangle). Après avoir introduit cet outil, j'essaierai de démontrer comment une quantité substantielle des résultats qui ont émergé autour de $P_K(n)$ peuvent être vus comme une conséquence directe ou indirecte de ce triangle dit "magique". Dans le même mouvement, j'aborderai une généralisation du triangle magique et de ses propriétés lorsque l'on conditionne à n'avoir plus qu'une fraction des n points sur la frontière de l'enveloppe convexe.

- [1] I. Bárány. *Affine perimeter and limit shape*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **484**, 71–84, 1997.
- [2] I. Bárány. *Sylvester's question : The probability that n points are in convex position*. The Annals of Probability, **27(4)**, 2020–2034, 1999.
- [3] I. Bárány, G. Rote, W. Steiger, C.-H. Zhang. *A central limit theorem for convex chains in the square*. Discrete & Computational Geometry, **23**, 35–50, 2000.
- [4] H. J. Hilhorst, P. Calka, G. Schehr. *Sylvester's question and the Random Acceleration Process*. Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment, p. P10010, 2008. 29 pages, 4 figures ; references added and minor changes.
- [5] J.-F. Marckert. *The probability that n random points in a disk are in convex position*. Brazilian Journal of Probability and Statistics, **31(2)**, 320–337, 2017.
- [6] L. Morin. *Probability that n points are in convex position in a regular κ -gon : Asymptotic results*. Advances in Applied Probability, pp. 1–60, 2024.
- [7] P. Valtr. *Probability that n random points are in convex position*. Discrete and computational geometry, **13(3-4)**, 637–643, 1995.
- [8] P. Valtr. *The probability that n random points in a triangle are in convex position*. Combinatorica, **16(4)**, 567–573, 1996.