F-équivalence pour les systèmes paraboliques et stabilisation rapide d'EDP non-linéaires

Vincent Boulard (CERMICS), Amaury Hayat (CERMICS)

12ème Congrès SMAI – 05 juin 2025

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

IP PARIS

Outline

Framework abstrait

Un **système de contrôle** est une paire (A, B), de dynamique

$$\begin{cases} \partial_t y = Ay + Bu, \ \forall t \in (0, T), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

- H et U deux espaces de Hilbert séparables, $y(t) \in H$, $u(t) \in U$.
- A génère un C^0 semigroupe sur H.
- $B \in \mathcal{L}(U, D(A^*)')$ opérateur de contrôle.
- $T \in (0, +\infty]$ horizon de temps et $u \in L^2(0, T; U)$ contrôle.

Exemples

On fixe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné régulier.

- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné régulier, et $\omega \subset \Omega$, **contrôle interne** de l'équation de la chaleur

$$\partial_t y = \Delta y + 1_\omega u(t,x), \tag{2}$$

ici $H = U = L^2(\Omega)$, $A = \Delta$, $B = f \mapsto 1_\omega f \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$.

- Soit $h_1, h_2 \in H^{-2}(\mathbb{T}^d)$, **contrôle scalaire** de l'équation de la chaleur

$$\partial_t y = \Delta y + h_1 u_1(t) + h_2 u_2(t), \tag{3}$$

ici $H = L^2(\Omega)$, $U = \mathbb{C}^2$, $A = \Delta$, $B = u \mapsto h \cdot u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, H^{-2}(\mathbb{T}^d))$.
Typiquement pour $d \leq 3$, on peut prendre $h_1 = \delta_{x_1}$ et $h_2 = \delta_{x_2}$.

Exemples

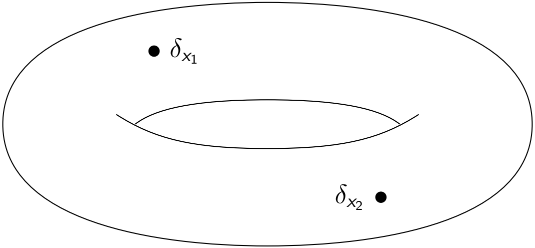

Figure: Contrôle ponctuel de la chaleur sur $\mathbb{T}^2$.

Stabilisation

Le problème de **stabilisation** à vitesse $\lambda > 0$ pour (A, B), consiste à trouver un opérateur (feedback) $K \in \mathcal{L}(D(A), U)$ tel que le système

$$\begin{cases} \partial_t y = (A + BK)y, \\ y(0) = y_0 \in H, \end{cases} \tag{4}$$

soit exponentiellement stable à un rythme $-\lambda$, pour tout $y_0 \in H$.

On parle de **stabilisation rapide**, si on peut stabiliser pour toute vitesse $\lambda > 0$.

F-équivalence (feedback-equivalence)

Le problème de F-**équivalence** consiste à déterminer si un système de contrôle donné peut être rendu dynamiquement équivalent à un autre système cible en choisissant un feedback approprié.

F-équivalence (feedback-equivalence)

Pour un système de contrôle

$$\partial_t y = Ay + Bu, \tag{5}$$

et un système cible

$$\partial_t z = \widetilde{A} z, \tag{6}$$

existe-t-il un feedback K tel que le système de contrôle (5) avec $u = Kz$ soit équivalent au système cible (6) (c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme T reliant les deux systèmes via $z = Ty$) ?

F-équivalence (feedback-equivalence)

Formellement, cela signifie

$$T(A+BK) = \widetilde{A}T, \tag{7}$$

En pratique on a souvent $\widetilde{A} = A - \lambda$.

F-équivalence (feedback-equivalence)

En dimension finie, on sait que (A, B) est rapidement stabilisable **si et seulement si**, pour tout $\lambda > 0$, il existe (T, K) tel que

$$T(A + BK) = (A - \lambda)T. \tag{8}$$

De plus si on impose $TB = B$, alors le couple (T, K) est unique.

F-équivalence (feedback-equivalence)

En dimension infinie :

- Des premiers résultats datant d'une dizaine d'années sur des exemples spécifiques.[1]
- Plus récemment, des résultats très généraux pour un système (A, B), avec B un contrôle scalaire, et A un opérateur diagonalisable dans une base de Riesz.[2]

[1] Jean-Michel Coron and Qi Lü. "Fredholm transform and local rapid stabilization for a Kuramoto–Sivashinsky equation". In: *Journal of Differential Equations* (2015).

[2] Amaury Hayat and Epiphane Loko. "Rapid Stabilization of General Linear Systems with F-equivalence". In: *Preprint* (2024).

Systèmes paraboliques

On travaille maintenant avec les hypothèses suivantes sur (A, B) :

- A est autoadjoint, et $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ avec

$$\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

  Ainsi il existe une base de Hilbert $(e_n)_{n\geq 1}$ de vecteurs propres.
- Contrôles scalaires, i.e. $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, D(A)')$.

Un opérateur A vérifiant ces hypothèses sera dit **parabolique diagonal**.

Systèmes paraboliques (exemple)

L'exemple canonique est $A = \Delta_g$, où Δ_g est le Laplacien sur une variété compacte $(\mathcal{M}, g)$.

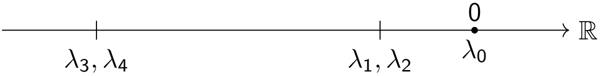

Figure: Spectre du laplacien sur $\mathbb{T}$.

F-équivalence parabolique

On fixe $\lambda > 0$, et on décompose l'espace en basses/hautes fréquences

$$H = L_\lambda \oplus H_\lambda,$$
$$L_\lambda = \mathrm{vect}\left\{e_n \mid \lambda_n \geq -\lambda\right\},$$
$$H_\lambda = \overline{\mathrm{vect}\left\{e_n \mid \lambda_n < -\lambda\right\}}^H.$$

On note P_λ la projection orthogonale sur L_λ, et $m(\lambda)$ la plus grande multiplicité d'une valeur propre dans L_λ.

F-équivalence parabolique

Soit $\mu > \lambda$, on pose comme opérateur cible

$$D_\mu = (A - \mu)P_\lambda + A(I - P_\lambda).$$

F-équivalence parabolique

Soit A un opérateur parabolique diagonal, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{m(\lambda)}, D(A)')$ et $\lambda > 0$.

Théorème

B est λ-approximativement contrôlable, si et seulement si, pour presque tout $\mu > \lambda$, il existe une F-équivalence (T, K) entre (A, B) et D_μ, avec $K \in \mathcal{L}(L_\lambda, \mathbb{C}^{m\lambda})$, i.e.

$$\begin{cases} T(A + BK) = D_\mu T, \text{ dans } \mathcal{L}(H, D(A)'), \\ TB = B, \text{ dans } D(A)'. \end{cases}$$

Non-linéarités admissibles

On s'intéresse maintenant aux systèmes non-linéaires de la forme

$$\partial_t y = Ay + Bu + F(y),$$

avec $F : D_{1/2}(A) \to D_{-1/2}(A)$ vérifiant

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall y, z \in H,\ \|y\|_H, \|z\|_H \leq \delta, \\ &\|F(y) - F(z)\|_{D_{-1/2}(A)} \leq \varepsilon \|y - z\|_{D_{1/2}(A)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Résultats cas non-linéaire

Corollaire

Si B est λ-approximativement contrôlable, F satisfait (9), alors il existe $\delta > 0$ et $C > 0$, tel que pour tout $y_0 \in B_H(\delta)$, il existe une unique solution $y \in C^0([0, +\infty); H)$ de

$$\begin{cases} \partial_t y = (A + BK)y + F(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où K est donné par F-équivalence, de plus on a

$$\forall t \geq 0, \quad \|y(t)\|_H \leq Ce^{-\frac{\lambda}{2}t}\|y_0\|_H.$$

Résultats cas non-linéaire

Corollaire

Si B est λ-approximativement contrôlable, F satisfait (9), alors il existe $\delta > 0$ et $C > 0$, tel que pour tout $y_0 \in B_H(\delta)$, il existe une unique solution $y \in C^0([0, +\infty); H)$ de

$$\begin{cases} \partial_t y = (A + BK)y + F(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où K est donné par F-équivalence, de plus on a

$$\forall t \geq 0, \quad \|y(t)\|_H \leq C e^{-\frac{\lambda}{2} t} \|y_0\|_H.$$

Preuve : Par F-équivalence, $A + BK$ est parabolique diagonal, l'existence et l'unicité pour le système non-linéaire sont obtenues par point fixe, et l'estimée de stabilité découle d'un Grönwall.

Perspectives

- Comment faire si $\sigma_{ess}(A) \neq \emptyset$? Typiquement Δ_g sur $(\mathcal{M}, g)$ complète et non comapcte.
- Applications de la théorie dans d'autres branches des mathématiques ?