Méthode de champ de phase et flots géométriques d'interfaces

Elie Bretin

Institut Camille Jordan & INSA Lyon

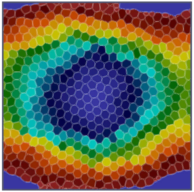
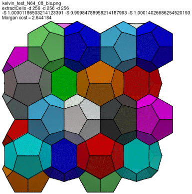
12ième Biennale Française des Mathématiques Appliquées et Industrielles - Carcans Maubuisson (Juin 2025)

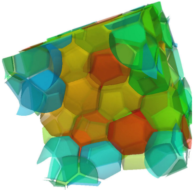
INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Math Institut Camille Jordan

- ANR Digital-Snow

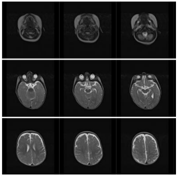
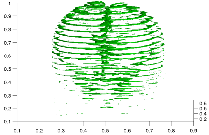
Application à la conjecture de Kelvin : *Trouver des pavages de $\mathbb{R}^3$ par des cellules de volume identique et de surface minimale.*

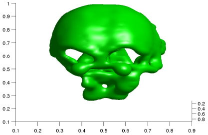



ANR Geometrya

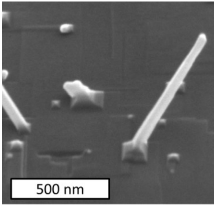
Reconstruction de surfaces à partir de coupes : application aux données d'IRM.

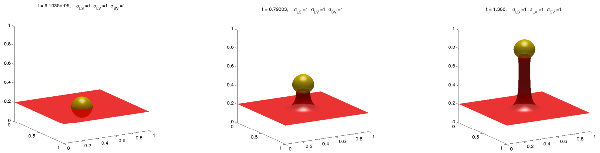





- Projet CNRS Nanophase

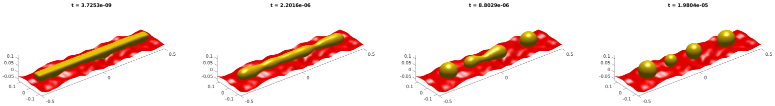
Modélisation de la croissance de nanofils de type VLS





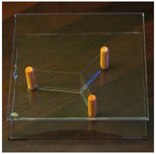
- ANR BEEP

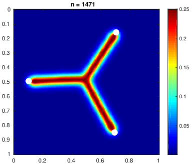
Flot de diffusion de surface et application au dé-mouillage de structures fines

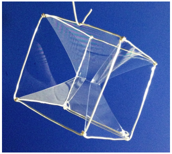


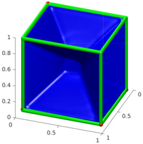
- ANR- Geometrya, Stoiques, Pepr EDP-AI

Approximation du problème de Steiner et de Plateau









Objectif de l'exposé :

- **Introduction** des méthodes de champ de phase comme **outils théorique et numérique très performant** pour l'approximation d'évolution d'interface orientée
- Exemple de limites dans le cas de **diffusion de surface**
- Exemple de limites dans le cas de **surface non orientée**

Exemple d'énergies géométriques simples

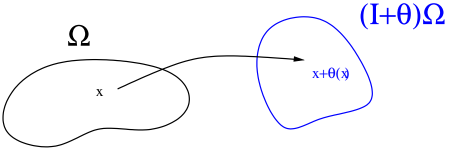
- **Volume et périmètre**

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx \quad \text{and} \quad P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

- **Dérivée de forme** (au sens de Hadamard)

$$J'(\Omega)(\theta) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J((Id + \epsilon\theta)\Omega) - J(\Omega)}{\epsilon},$$

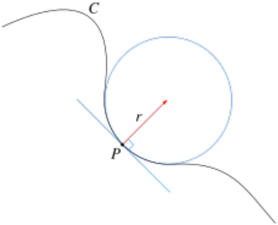
où $\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ de déformation "régulier"

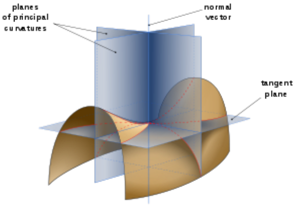


Dérivée de forme et courbure moyenne

- **Quantités géométriques :** normale et courbure moyenne

$$\mathbf{n} = \nabla dist(x, \Omega) \quad \text{et} \quad H = \mathrm{div}(n)$$





- **Dérivée de forme**

$$V'(\Omega)(\theta) = \int \theta \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^{n-1} \quad \text{et} \quad P'(\Omega)(\theta) = \int H\theta \cdot \mathbf{n} d\mathcal{H}^{n-1}$$

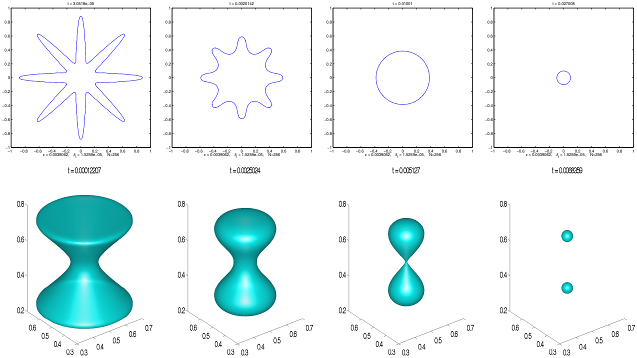
- **Gradient de forme**

$$\nabla V(\Omega) = \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \nabla P(\Omega) = H\mathbf{n}$$

Mouvement par courbure moyenne $t \mapsto \Omega(t)$

- Flot de gradient L^2 du périmètre : loi d'évolution

$$V_n = H$$



Quelques propriétés du mouvement par courbure moyenne $t \to \Omega(t)$

- Existence locale pour un ensemble initial convexe. L'ensemble $\Omega(t)$ reste convexe, converge vers un point et devient asymptotiquement sphérique [Huisken 1984]
- En dimension 2, existence locale pour des courbes fermées régulières. L'ensemble $\Omega(t)$ devient convexe en un temps fini, converge vers un point et devient **asymptotiquement sphérique** [Gage et Hamilton 1986], [Grayson 1987]
- En dimension $n > 2$: **singularités en temps fini** [Grayson 1989]
- Principe d'inclusion [Ecker 2002] :

$$\Omega_1(0) \subset \Omega_2(0) \text{ alors } \Omega_1(t) \subset \Omega_2(t), \quad \forall t \in [0, T]$$

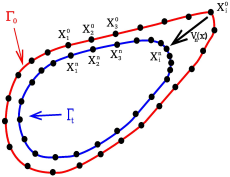
Discrétisation numérique du flot $t \to \Omega(t)$

Méthode paramétrique : $\Gamma = \{X(s) = (x(s), y(s))\ \}_{s\in[0,2\pi]}$

- Equation d'évolution

$$X_t = \frac{1}{|X_s|}\left(\frac{X_s}{|X_s|}\right)_s$$

Changement topologie ?

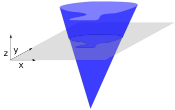


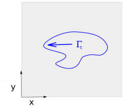
Méthode level set : $\Gamma(t) = \{x\ ;\ \varphi(x,t) = 0\}$

- Equation d'Hamilton Jacobi

$$\partial_t \varphi = \kappa(\varphi)|\nabla\varphi| = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right)|\nabla\varphi|$$

Discrétisation numérique ?





Principe des méthodes de champ de phase

Approximation des énergies géométriques J

- **Approximation au sens de la Γ-convergence**

Soit (X, d) un espace métrique, et soit $J_\varepsilon : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une famille de fonctions. On dit que J_ε Γ-converge dans X vers $J : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si :

Γ lim inf : $\forall u_\varepsilon \to u$ dans X, $\quad \liminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq J(u)$

Γ lim sup : $\exists u_\varepsilon \to u$ dans X tel que $\quad \limsup_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J(u)$

- **Convergence des suites minimisantes**

Si $J_\varepsilon : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Γ-converge vers $J : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et si J_ε est équi-coercive, alors J est coercive et atteint son minimum sur X. De plus,

$$\min_{u \in X}\{J(u)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{u \in X} \{J_\varepsilon(u)\}$$

Quel choix de topologie ?

- Définition de **la variation totale** $|Du|$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$|Du|(\mathbb{R}^d) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div}(\varphi)\, dx;\ \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ et } \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}$$

- Si $u = \chi_\Omega$

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \, d\mathcal{H}^{d-1} = |D\chi_\Omega|(\mathbb{R}^d)$$

- **Périmètre généralisé** (au sens de Caccioppoli) dans $L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$P(u) := \begin{cases} |Du|(\mathbb{R}^d) & \text{si } u = \chi_\Omega \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases},$$

- **Semi-continuité inférieure** de P pour la topologie $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Approximation du périmètre

- **Energie de Cahn-Hilliard**

$$P_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\varepsilon \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx$$

où $W(s) = \frac{1}{2}s^2(1-s)^2$.

- [Modica-Mortola77]
  Γ-convergence de P_ε vers $c_w P$
  avec $c_W = \int_0^1 \sqrt{2W(s)}ds$

Γ-lim inf

Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que $\liminf P_\epsilon(u_\epsilon) < \infty$.

- Comme **le potentiel** W **s'annule en** $\{0,1\}$, et que $\int W(u_\varepsilon)dx \to 0$, on en déduit que

$$u_\epsilon \to u = \chi_\Omega$$

- **Avec** $a^2 + b^2 \geq 2ab$, on vérifie que

$$P_\epsilon(u_\epsilon) \geq \int |\nabla u_\epsilon| \sqrt{2W(u_\epsilon)}dx = \int |D\phi(u_\epsilon)|dx,$$

où $\phi(s) = \int_0^s \sqrt{2W(s)}ds$

- **Semi-continuité inférieure de la variation totale**

$$\lim_{inf} \int |D\phi(u_\epsilon)| \geq \int |D\phi(\chi_\Omega)| = \phi(1)P(\chi_\Omega) = c_W P(\chi_\Omega)$$

Γ-lim sup

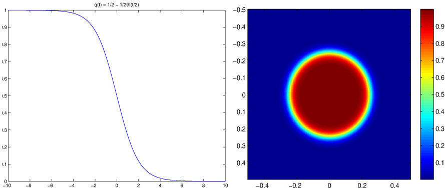
Soit $u = \chi_\Omega$ avec Ω régulier. L'objectif est d'expliciter une suite u_ε telle $u_\varepsilon \to u$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\limsup_{\epsilon\to 0} P_\epsilon(u_\epsilon) \leq P(\Omega)$.

- **Profil de champ de phase $1D$**

$$q = \underset{\gamma\in H^1_{loc}(\mathbb{R})}{\arg\min} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|\gamma'(s)|^2 + W(\gamma(s)) \right) ds \ ; \ \gamma(-\infty) = 1, \gamma(0) = 1/2, \gamma(\infty) = 0 \right\}.$$

- **Candidat possible**

$$u_\varepsilon(x) = q\left(\frac{dist(x,\Omega)}{\epsilon}\right)$$



- **Formule de la co-aire :**

$$\int_Q u(x)|\nabla\phi|dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\phi^{-1}(s)} u(x) d\mathcal{H}^{\mathrm{n-1}} \right) ds$$

- **Application avec** $\phi = dist(x, \Omega) = d$ (où $|\nabla d| = 1$), on déduit que

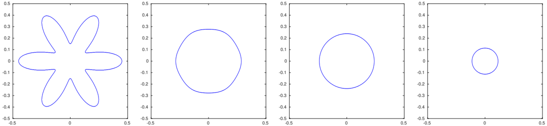
$$\begin{aligned} P_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|q'(d/\varepsilon)|^2}{2} + \frac{1}{\varepsilon} W(q(d/\varepsilon)) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varepsilon s) \left[\frac{|q'(s)|^2}{2} + W(q(s)) \right] ds \end{aligned}$$

avec $g(s) = |D\chi_{\{dist(x,\Omega) \leq s\ \}}|$.

- **La régularité de** g implique que $g(\varepsilon s) \to g(0) = P(\Omega)$.

Principe de la méthode de champ de phase

Flot géométrique d'une interface.



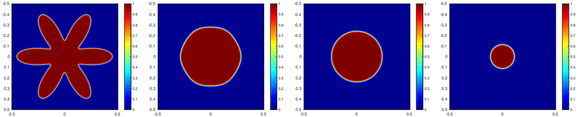
Approximation :

- Énergie de Cahn-Hilliard :

$$P_\varepsilon(u) = \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx.$$

- Equation d'Allen-Cahn :

$$\partial_t u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_\varepsilon).$$



Un outil théorique et numérique très performant

- **Erreur d'approximation du modèle :**

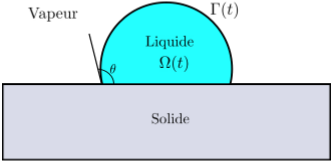
$$dist(\Gamma(t), \Gamma_\varepsilon(t)) \simeq \varepsilon^2$$

- **Équation très simple à discrétiser :**

$$\frac{u_\varepsilon^{n+1} - u_\varepsilon^n}{\delta_t} = \Delta u_\varepsilon^{n+1} - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u_\varepsilon^n).$$

- **Approche pouvant être étendue à de nombreux contextes :** contraintes de volume, zones d'inclusion-exclusion, cadre multiphase, approximation de flots géométriques variés (courbure anisotrope, Willmore, diffusion de surface, etc.)
- **Outils d'analyse :** calcul des variations, Γ-convergence, développement asymptotique, analyse numérique

Démouillage ou mouillage d'une structure mince sur une structure solide rugueuse

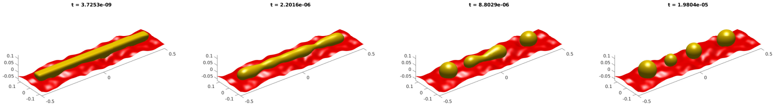


- **Flot de gradient H^{-1} du périmètre P**

$$V_n = \Delta_\Gamma H$$

- **Loi de Young**

$$\cos(\theta) = \frac{\sigma_{SV} - \sigma_{LS}}{\sigma_{VL}}$$



Approximation et équation de Cahn Hilliard

- **Energie de Cahn Hilliard**

$$P_\varepsilon(u) = \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right) dx.$$

- **Flot de gradient H^{-1} de P_ε**

$$\begin{cases} \partial_t u & = \Delta \mu \\ \mu & = -\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \end{cases}$$

- Modèle limite : flot de Mullins-Sekerka [Pego 89], [Alikakos 94]

$$V_n = [\nabla_n \nu]_\pm \ \text{ where } \begin{cases} \Delta \nu = 0, \ \text{ on } Q \setminus \partial\Omega \\ \nu = H \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

- Propriétés physiques de la solution ?

Ajout de mobilité

- Equation de Cahn Hilliard avec **mobilité dégénérée**

$$\begin{cases} \partial_t u & = \operatorname{div}\left(M(u)\nabla\mu\right), \text{ avec} \\ \mu & = -\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \end{cases}$$

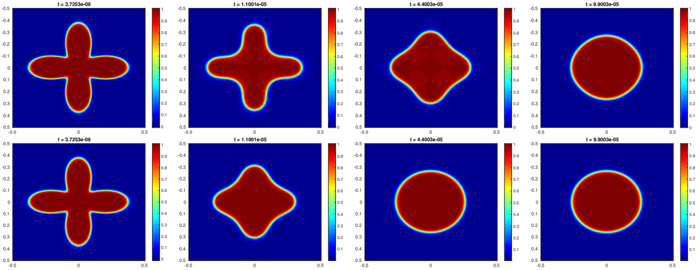
- Existence de solution faible dans $[0,1]$ [Elliott,Garcke96]. Unicité ?
- Convergence vers le flot de diffusion de surface avec $M(s) = 36\ s^2(1-s^2)$.

Ordre de convergence du modèle

- **Développement asymptotique** quand $\varepsilon \to 0$

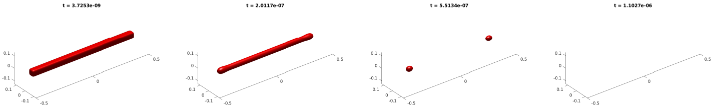
$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t) = q\left(\dfrac{d(x,\Omega(t))}{\varepsilon}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ V_\varepsilon = \Delta_{\Gamma(t)} H(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

- **Comparaison** des modèles de Cahn-Hilliard



Application pour le problème de démouillage

- **Evolution de structures fines**



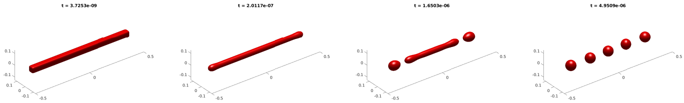
- **Perte de volume observée en $O(\varepsilon)$!**

Correction du modèle

- Equation de Cahn Hilliard avec **double mobilités dégénérées**

$$\begin{cases} \partial_t u & = N(u)\,\mathrm{div}\left(M(u)\nabla\left(N(u)\mu\right)\right) \\ \mu & = \Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} W'(u) \end{cases}$$

- Modèle d'approximation d'ordre 2 avec $M(s) = s^2(1-s)^2$ and $N(s) = 1/\sqrt{M(s)}$.



- Existence de solution ? [Cherfils,Miranville,2023]

Approximation of surface diffusion flow : a second order variational Cahn–Hilliard model with degenerate mobilities, E. Bretin, S. Masnou, A. Sengers, G. Terii, *M3AS, 2022.*

Discrétisation numérique

- Cas de l'équation de **Cahn-Hilliard sans mobilité**

$$\begin{cases} \partial_t u & = \Delta \mu \\ \mu & = -\Delta u + \frac{1}{\epsilon^2} W'(u) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla P_\varepsilon(u) \end{cases}$$

- Une approche **spectrale-Fourier** de type convexe-concave [Eyre 98]

$$\begin{cases} (u^{n+1} - u^n)/\delta_t & = \Delta \mu^{n+1} \\ \mu^{n+1} & = \left(-\Delta u^{n+1} + \frac{\alpha}{\epsilon^2} u^{n+1}\right) + \left(\frac{1}{\epsilon^2}(W'(u^n) - \alpha u^n)\right), \end{cases}$$

- **Stabilité énergétique inconditionnelle**

$$P_\varepsilon(u^{n+1}) \leq P_\varepsilon(u^n)$$

- Traitement de la mobilité ?

$$(u^{n+1} - u^n)/\delta_t = \text{div}\left(M(u^n) \nabla \mu^{n+1}\right)$$

Traitement numérique des termes de mobilités

- **Splitting d'opérateur appliqué à la mobilité :**

$$\operatorname{div}(M(u^n)\nabla\mu) = m\Delta\mu - \operatorname{div}((m - M(u^n))\nabla\mu)$$

- **Flot de gradient J^{-1} d'une fonction convexe E**

$$\begin{cases} u_t & = -\nabla J(\mu) = -L^* L\mu = -{L_1}^* L_1\mu + {L_2}^* L_2\mu \\ \mu & = \nabla E(u), \end{cases}$$

where $J(\mu) = \frac{1}{2}\|L\mu\|^2 = \frac{1}{2}\|L_1\mu\|^2 - \frac{1}{2}\|L_2\mu\|^2$

- Approche numérique de type **concave-convexe**

$$\begin{cases} (u^{n+1} - u^n)/\delta_t & = -{L_1}^* L_1\mu^{n+1} + {L_2}^* L_2\mu^n, \\ \mu^{n+1} & = \nabla E(u^{n+1}), \end{cases}$$

Efficace en pratique, mais la décroissance de E n'est pas garantie au cours de itérations.

Approche dite **SAV** de la mobilité

- **Variable scalaire auxiliaire** $r = \sqrt{J_2(\mu)} = \sqrt{\frac{1}{2}\|L_2\mu\|^2}$:

$$\begin{cases} u_t & = -L_1^* L_1 \mu + \frac{r}{\sqrt{J_2(\mu)}} {L_2}^* L_2 \mu, \\ r_t & = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mu)}} \langle L_2\mu, L_2\mu_t \rangle \\ \mu & = \nabla E(u), \end{cases}$$

- **Discrétisation temporelle**

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t} & = -{L_1}^* L_1 \mu^{n+1} + \frac{r^{n+1}}{\sqrt{J_2(\mu^n)}} {L_2}^* L_2 \mu^n, \\ r^{n+1} - r^n & = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mu^n)}} \langle L_2\mu^n, L_2(\mu^{n+1} - \mu^n) \rangle. \\ \mu^{n+1} & = \nabla E(u^{n+1}), \end{cases}$$

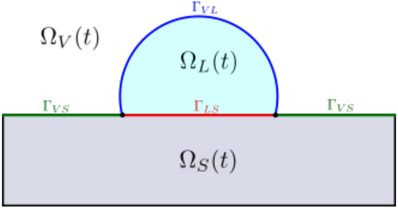
- **Stabilité énergétique** $(E(u^{n+1}) \leq E(u^n))$.

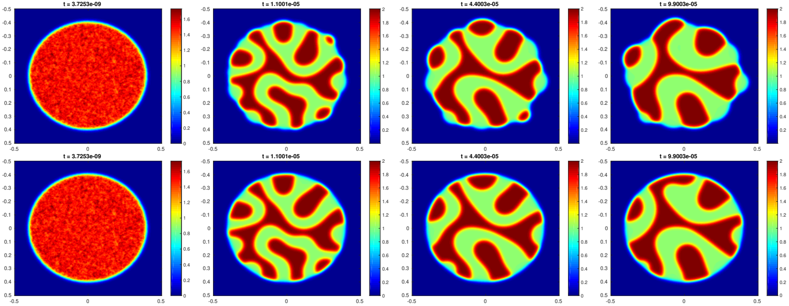
A mobility-SAV approach for a Cahn-Hilliard equation with degenerate mobilities, E. Bretin, L. Calatroni and S. Masnou, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, 17(1) :131-159, 2024 .*

Application au mouillage : un problème multiphase

- Diffusion de surface

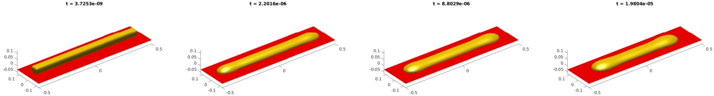
$$\frac{1}{\nu_{ij}} V_{ij} = \sigma_{ij} \Delta_{\Gamma_{ij}} H_{ij}$$



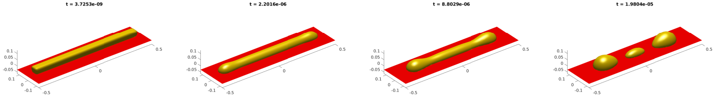


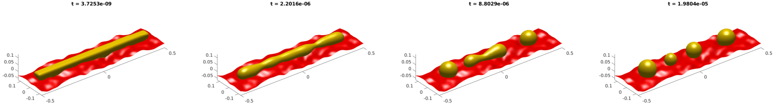
Influence de l'angle de contact solide/liquide

$$\sigma_{VS} = 1.7,\ \sigma_{LS} = \sigma_{LV} = 1$$



$$\sigma_{LS} = \sigma_{VS} = \sigma_{LV} = 1$$

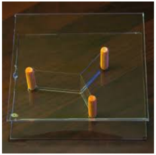


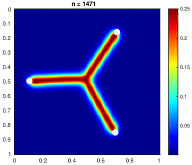


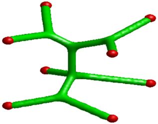
A multiphase Cahn–Hilliard system with mobilities for the simulation of wetting, E. Bretin, R. Denis, S. Masnou, A. Sengers, G. Terii, *M2AN 2023.*

Cas de surfaces non orientables, singulières ou de co-dimension supérieure à 1

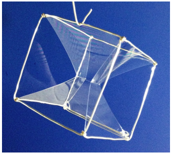
Problème de Steiner : Trouver un ensemble compact, connexe K de longueur minimale qui contienne tous les points donnés $x_i \in \mathbb{R}^d$.

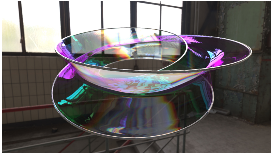


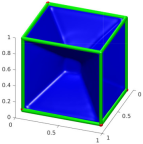


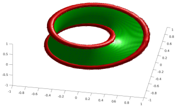


Problème de Plateau : Déterminer une surface d'aire minimale dont le bord est une courbe donnée $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.





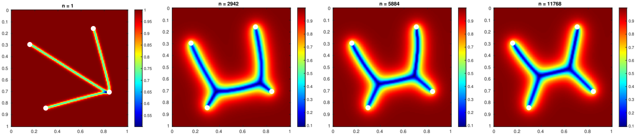




Modèle de champ de phase pour le problème de Steiner

Energie de Cahn-Hilliard + terme de contraintes géodésiques
[Lemenant, Santambrogio, Bonnivard ; 2015]

$$F_\varepsilon(u) = \int_Q \varepsilon|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}(1-u)^2 dx + \frac{1}{\lambda_\varepsilon}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}(u^2; x_0, x_i),$$

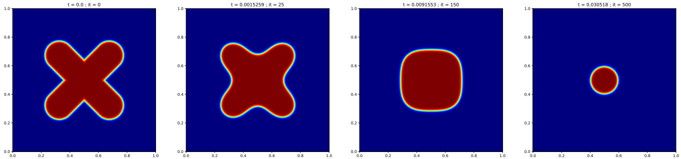


Difficultés : Analyse théorique du modèle, **régularité des solutions**, extension en dimension 3.

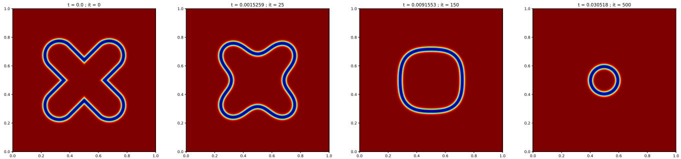
Numerical approximation of the Steiner problem in dimension 2 and 3, M. Bonnivard, E. Bretin, A. Lemenant, *Math. Comp., 89, 2020, 1–43.*

Flot géométrique et interfaces non orientées

Le modèle d'Allen-Cahn permet d'approcher facilement le flot d'une interface orientée.



Il n'existe en revanche aucun modèle de champ de phase pour approcher l'évolution d'une interface lorsque sa **représentation n'est pas orientée** !



Apprentissage du flot à l'aide d'un réseau de neurones

Thèse de G. Terii, avec R. Denis et S. Masnou

- **Objectif du réseau :** effectuer un seul pas de temps

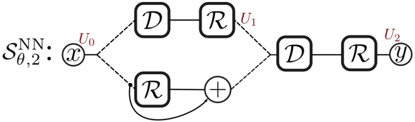
$$u^{n+1} = S_\theta^{\mathrm{NN}}[u^n]$$

- **Approche :** définir une architecture de réseau inspirée des schémas numériques classiques pour l'**équation d'Allen-Cahn**.
- **Données d'entraînement :** évolutions connues de flots géométriques simples (*cercle*, *sphère*, *cylindre*).

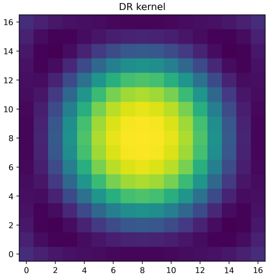
Learning phase field mean curvature flows with neural networks, E. Bretin, R. Denis, S. Masnou, G. Terii, *Journal of Computational Physics (2022).*

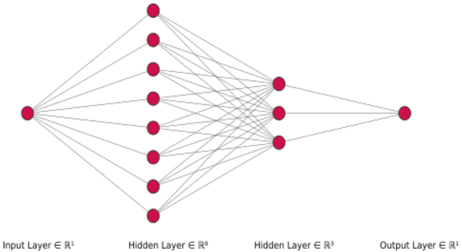
Structure de réseaux

- **Réseaux d'ordre 1 et 2 :** Combinaison de neurones de diffusion D et de neurones de réaction R

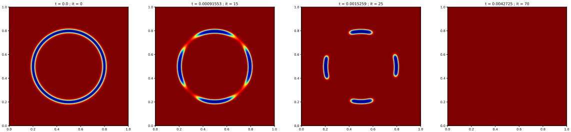


- **Neurone de diffusion : noyau de convolution K**
- **Neurone de réaction : perceptron multicouche** $1D$

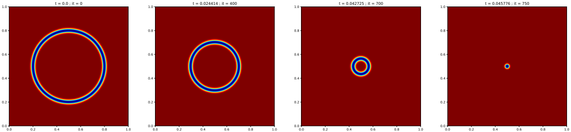




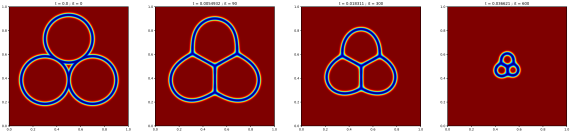
- Le premier réseau $S_{\theta,1}^{\mathrm{NN}}$ **n'arrive pas** à déplacer l'interface



- Le second réseau $S_{\theta,2}^{\mathrm{NN}}$ **réussit à reproduire** la loi d'évolution



- Excellente capacité de généralisation de $S_{\theta,2}^{\mathrm{NN}}$ pour approcher des évolutions avec points triples !



Que peut-on apprendre de ces réseaux ?

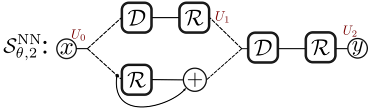
- ANR Stoiques, PEPR EDP AI

  - **Impossibilité** d'entraîner un réseau d'ordre 1 $S_{\theta,1}^{\mathrm{NN}}$!

Il n'existe pas de modèle de champ phase de la forme

$$u_t = Du + R(u)$$

  - **Entraînement possible** d'un réseau d'ordre 2 $S_{\theta,2}^{\mathrm{NN}}$



Existence d'un modèle d'approximation de la forme

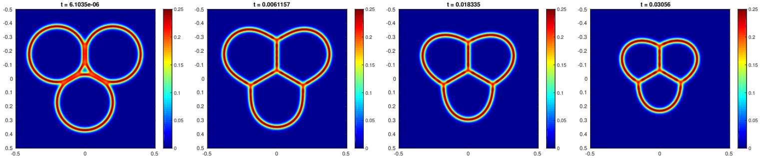
$$u_t = D_1 u + R_1(u) + R_2(D_2 u)$$

Identification d'un nouveau modèle de champ de phase

- Un modèle de type **Willmore-Cahn Hilliard**

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u) = \int \varepsilon \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}F(u)dx + \sigma_\varepsilon \int \frac{1}{2\varepsilon}\left(\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon}F'(u)\right)^2 dx,$$

avec **un potentiel F non lisse** (zéro double en $s = 0$ et obstacle en $s = 1/4$)



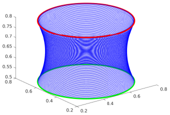
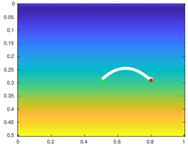
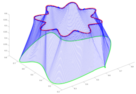
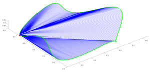
E. Bretin, A. Chambolle, S. Masnou, On a Cahn-Hilliard-Willmore phase field model with nonsmooth potential, *preprint (2024)*.

Application au problème de Plateau

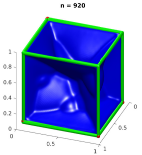
Thèse de E. Machefert avec A. Lemenant et M. Bonnivard

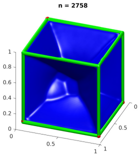
- Utilisation d'une **distance géodésique entre lacets**

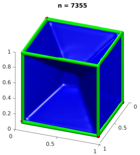
$$D(u, \gamma_1, \gamma_2) := \inf_{\varphi : \gamma_1 \longrightarrow \gamma_2} \int_{\varphi([0,1])} |u|^2 d\mathcal{H}^2,$$

- Modèle de champ de phase qui couple **l'énergie de Cahn-Hilliard-Willmore** avec **ce terme de distance géodésique**.







Apport des réseaux de neurones

- **Nouvel outil de modélisation mathématique :**
  Identification des lois d'**anisotropie** pour les modèles de croissance cristalline, identification des lois de **mobilité** dans des problèmes de diffusion de surface...
- **Nouvel outil de calcul scientifique :**
  Accélération de la résolution de modèles pour les **flots de Willmore**, développement de schémas numériques efficaces pour des **opérateurs de diffusion anisotrope**...