

Contrôle Optimal pour les problèmes dégénérés en chimiotaxie

Sarah SERHAL, LMJL, LMA - Nantes
Mazen SAAD, LMJL - Nantes

Georges CHAMOUN, ESIB - Liban
Toni SAYAH, LMA - Liban

Dans cet exposé, nous étudions un modèle contrôlé de chimiotaxie issu de la biologie, formulé par un système d'équations parabolique-parabolique avec une diffusion dégénérée et un terme de contrôle agissant sur la concentration du chimioattractant. L'objectif est de déterminer un contrôle optimal sur la concentration du chimiotactique afin d'atteindre une distribution cellulaire cible, notamment dans le cadre du traitement du cancer, où l'on cherche à minimiser les cellules cancéreuses.

Ce problème est formulé comme une optimisation sous contraintes, où les contraintes sont définies par les solutions faibles du modèle contrôlé. Contrairement aux approches classiques basées sur une forte régularité des solutions d'état, notre formulation privilégie les solutions faibles. Cette approche permet de garantir l'existence d'un contrôle optimal tout en simplifiant l'analyse mathématique et la formulation du système adjoint, en particulier dans le cas de la diffusion dégénérée. Les études antérieures (see [1, 2]) n'ont pas abordé la problématique spécifique de la dégénérescence de la diffusion, qui constitue une difficulté majeure dans notre cadre. Notre objectif principal est donc d'étudier l'existence de solutions faibles pour le problème de contrôle optimal des modèles de chimiotaxie avec une fonction de diffusion à dégénérescence bilatérale.

Nous démontrons dans un premier temps l'existence de solutions pour le modèle contrôlé à l'aide d'une méthode de semi-discrétisation en temps inspirée de [3]. Nous montrons que la solution semi-discrétisée satisfait le principe du maximum pour tout contrôle, où la partie positive est traitée explicitement et la partie négative implicitement.

Nous établissons ensuite l'existence d'un contrôle optimal et de son système adjoint en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange. Contrairement aux cas classiques, ce multiplicateur satisfait une équation parabolique rétrograde, qui est bien posée uniquement lorsque le temps final est connu. L'équation associée au multiplicateur de Lagrange présente elle-même une structure dégénérée, posant ainsi des défis analytiques supplémentaires. Nous définissons donc un système régularisé afin de surmonter la dégénérescence sous quelques conditions de régularité (see [4]).

- [1] F. Dai, B. Liu. *Optimal control and pattern formation for a haptotaxis model of solid tumor invasion*. Journal of the Franklin Institute, **356(16)**, 9364–9406, 2019.
- [2] F. Guillén-González, E. Mallea-Zepeda, M. Á. Rodríguez-Bellido. *Optimal bilinear control problem related to a chemo-repulsion system in 2d domains*. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, **26**, 29, 2020.
- [3] F. Marpeau, M. Saad. *Mathematical analysis of radionuclides displacement in porous media with nonlinear adsorption*. Journal of Differential Equations, **228(2)**, 412–439, 2006.
- [4] S. Serhal, G. Chamoun, M. Saad, T. Sayah. *Bilinear optimal control for chemotaxis model : The case of two-sidedly degenerate diffusion with volume-filling effect*. Nonlinear Analysis : Real World Applications, **85**, 104362, 2025. doi :<https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2025.104362>.