Approximations effectives d'EDP oscillantes à partir de mesures de surface agrégées

Simon RUGET, ENPC & Inria - Champs-sur-Marne
Claude LE BRIS, ENPC & Inria - Champs-sur-Marne
Frédéric LEGOLL, ENPC & Inria - Champs-sur-Marne

On s'intéresse à un problème inverse dans le cadre d'équations multi-échelles. Le but est de construire un *coefficient effectif* (représentant le problème aux grandes échelles) pour une équation elliptique comportant plusieurs échelles d'intérêt. Typiquement, on considère

$$-\mathrm{div}\,(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega, \qquad (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon)\cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega, \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné régulier, et où ε représente l'échelle caractéristique de variation du coefficient de diffusion, qui est typiquement supposée petite devant la taille du domaine Ω.

Sous réserve d'hypothèses sur le coefficient A_ε et dans la limite où le rapport d'échelle ε tend vers 0, la théorie de l'homogénéisation (voir [1]) stipule l'existence d'une équation limite prenant la forme d'une équation de diffusion

$$-\mathrm{div}\,(A_\star \nabla u_\star) = 0 \text{ dans } \Omega, \qquad (A_\star \nabla u_\star)\cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega, \tag{2}$$

et faisant intervenir un *coefficient homogénéisé* $A_\star$ constant. En toute généralité, il est difficile d'avoir accès au coefficient $A_\star$. Dans certains cas particuliers (cas de coefficients oscillants périodiques par exemple), $A_\star$ peut être déterminé numériquement (via le calcul des correcteurs), mais cela nécessite d'avoir un accès complet au coefficient A_ε.

On se place maintenant dans le cadre des problèmes inverses. On suppose ne pas avoir de connaissances directes sur le coefficient A_ε. On suppose avoir accès uniquement à la mesure des énergies $\mathcal{E}_\varepsilon(g)$ associées au système soumis à différents chargements g, où l'énergie est définie par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(g) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u_\varepsilon^T A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - \int_{\partial\Omega} g u_\varepsilon = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} g u_\varepsilon, \tag{3}$$

où $u_\varepsilon = u_\varepsilon(g)$ est solution de (1). En particulier, cette énergie est un scalaire s'exprimant à l'aide de quantités définies sur le bord du domaine. On dispose donc d'informations agrégées. Il est bien connu que la détermination de A_ε à partir de ces informations est un problème mal posé. L'objet de cet exposé est de présenter une méthodologie pour reconstruire un *coefficient effectif*. Cette méthodologie, basée sur un problème d'optimisation (voir [2,3] pour des premières approches dans cet esprit), s'inspire de la théorie de l'homogénéisation, mais a vocation à être plus générale (l'hypothèse de périodicité n'est pas fondamentalement requise, le rapport d'échelle n'a pas besoin d'être infiniment petit, ...).
On compare nos résultats à ceux donnés par la théorie de l'homogénéisation (dans des cas où $A_\star$ peut être calculé), et par les approches présentées dans [2, 3]. On montrera l'intérêt de l'approche en considérant en particulier des régimes où ε n'est pas infiniment petit.

Mots clefs : Problème Inverse, Homogénéisation, Approximation Grossière, Mesure de bords

Références : [1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, American Mathematical Society, 1978.
[2] C. Le Bris, F. Legoll, K. Li, *Approximation grossière d'un problème elliptique à coefficients hautement oscillants*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2013.
[3] C. Le Bris, F. Legoll, S. Lemaire, *On the best constant matrix approximating an oscillatory matrix-valued coefficient in divergence-form operators*, Control, Optimisation and Calculus of Variations, 2018.

Contact : `simon.ruget@enpc.fr`