

Identification des déformations du fond marin par mesure de la surface libre

Laurent BOURGEOIS, UMA - Palaiseau
Philippe MOIREAU, MEDISIM - Palaiseau
Raphael TERRINE, UMA-MEDISIM - Palaiseau

1 Position du problème

Notons $\chi(x, t)$ le déplacement normal du fond marin. Le potentiel des vitesses $\phi(x, z, t)$, la surface libre $s(x, t)$ et χ sont reliés par le problème direct suivant défini sur le domaine 2D rectangulaire borné $\Omega^R = (-R, R) \times (-H, 0)$. Les conditions de Robin transverses permettent de borner le domaine océanique en vue de la résolution numérique.

$$\begin{cases} (1/c^2)\partial_t^2\phi - \Delta\phi = 0 & \text{dans } \Omega^R \times (0, T), \\ \partial_t\phi + gs = 0 & \text{sur } \Gamma_0^R \times (0, T), \\ \partial_y\phi - \partial_t s = 0 & \text{sur } \Gamma_0^R \times (0, T), \\ \pm\partial_x\phi + (1/c_R)\partial_t\phi = 0 & \text{sur } \Sigma_{\pm R} \times (0, T), \\ -\partial_y\phi = \chi & \text{sur } \Gamma_{-H}^R \times (0, T), \\ \phi(0) = \partial_t\phi(0) = 0 & \text{dans } \Omega^R, \end{cases} \quad (1)$$

où c est la vitesse des ondes acoustiques et g l'intensité de la pesanteur. A partir du système (1), on définit deux problèmes :

1. **Le modèle complet** : Pour $c < \infty$ et $c_R = c$.
2. **Le modèle de gravité** : Pour $c = \infty$ et $c_R = \sqrt{gH}$.

Le problème inverse que nous étudions dans la suite consiste à retrouver la perturbation du fond marin χ sur Γ_{-H}^R par la mesure de la surface libre s sur Γ_0^R . Ce problème a déjà été étudié dans un cadre fréquentiel dans [1], nous présentons l'extension de ce travail au cadre temporel.

2 Stratégie de reconstruction

On montre que le problème inverse précédent se met pour $F \in H$ sous la forme : trouver $\phi \in V$ tel que :

$$A\phi = F. \quad (2)$$

où $A : V \rightarrow H$ un opérateur continu et V et H deux espaces de Hilbert. La fonction χ est alors obtenue par la relation $-\partial_y\phi = \chi$. Le problème (2) est mal posé du fait

d'une surabondance de conditions limites sur Γ_0^R et d'une absence de conditions limites sur Γ_{-H}^R , qui empêche l'existence de solutions en général. Par ailleurs, ϕ est uniquement déterminé dans le cône d'unicité :

$$Q_0 = \left\{ (x, y, t) \in \Omega^R \text{ s.t } 0 < t < T + \frac{y}{c} \right\},$$

qui est un sous-domaine strict de Ω^R dans le cas du modèle complet. En pratique, les mesures effectuées sont imprécises, ainsi si ϕ (solution exacte) et F (donnée exacte) vérifient (2), on suppose connu $F^\delta \in H$ tel que $\|F^\delta - F\|_H \leq \delta$ où δ correspond à l'amplitude du bruit de mesure. Pour pallier le caractère mal posé de (2), on introduit la solution de la régularisation de Tikhonov $\phi_\epsilon^\delta \in V$ tel que pour $\epsilon > 0$:

$$A^*A\phi_\epsilon^\delta + \epsilon\phi_\epsilon^\delta = A^*F^\delta, \quad (3)$$

et on choisit $\epsilon(\delta)$ suivant le principe de Morozov, soit :

$$\|A\phi_\epsilon^\delta - F^\delta\|_H = \delta.$$

En pratique, pour calculer $\epsilon(\delta)$ et $\phi^\delta := \phi_{\epsilon(\delta)}^\delta$ on utilise une stratégie de dualité développée dans [1] consistant à résoudre le problème :

$$\inf_{q \in H} J^\delta(q) := \frac{1}{2} \|A^*q\|_V^2 + \delta \|q\|_H - (F^\delta, q)_H \quad (4)$$

Le problème (4) étant non quadratique, une stratégie itérative de "quadratisation" est utilisée pour simplifier sa résolution. Notons q^δ l'unique solution de (4). Alors,

$$\epsilon(\delta) = \frac{\delta}{\|q^\delta\|_H}, \quad \phi^\delta = A^*q^\delta.$$

Par ailleurs, la résolution de (3) et (4) reviennent à des formulations mixtes espace-temps pour lesquelles on utilise une résolution par éléments finis prismatiques usuelle constituée d'un produit tensoriel de fonction $\mathbb{P}_1$ en espace et $\mathbb{P}_1$ en temps. Nous montrerons dans l'exposé des simulations numériques illustrant l'efficacité de la méthode pour le modèle complet et le modèle de gravité.

[1] L.Bourgeois, J-F.Mercier, R.Terrine. *Identification of bottom deformations of the ocean from surface measurements*. Inverse Problems and Imaging, 2025. doi :10.3934/ipi.2025008.