

Filtrage optimale sur des variétés

Philippe MOIREAU, École Polytechnique et CNRS - Palaiseau
Damiano LOMBARDI, Inria, Sorbonne Université et CNRS - Paris
Gaël LE RUZ, Sorbonne Université et Inria - Paris

L'assimilation de données vise à combiner de manière optimale des modèles dynamiques de systèmes physiques avec les mesures disponibles, afin d'estimer un état ou un paramètre du système. Dans de nombreuses applications médicales, comme la croissance tumorale [2] ou les problèmes d'électrophysiologie [1], l'espace des solutions ou des mesures est un espace de forme avec des données de type contour. Cependant la plupart des algorithmes d'assimilation de données séquentiels classiques, y compris le filtre de Kalman et ses extensions aux dynamiques non linéaires, sont définis dans des espaces euclidiens.

Dans cette présentation, nous développons un cadre déterministe permettant de formuler des filtres optimaux dans des variétés générales. En considérant un modèle en temps continu avec des observations discrètes d'une trajectoire réelle, nous établissons tout d'abord une généralisation aux variétés du filtre de Mortensen [4] en temps discret [3], où l'estimateur optimal est obtenu par la résolution d'une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman dans l'espace d'état. Nous en déduisons ensuite une version consistante en temps continu ainsi qu'une discrétisation spatiale. Dans la seconde partie, nous réduisons le coût de l'algorithme obtenu en utilisant une approximation quadratique de la fonction valeur, solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Ceci nous permet de retrouver et de justifier une version du filtre de Kalman étendu adaptée au contexte des variétés. Nous explorons également une approximation basée sur les tenseurs, qui peut être interprétée comme une classe d'approximation plus générale. Nous fournissons des résultats numériques d'estimation d'état et de paramètre en utilisant ces méthodes, en particulier avec l'exemple exigeant d'un système chaotique : le double pendule planaire avec observation sur la position. Enfin, nous montrons comment notre approche peut être adaptée pour traiter des données de formes définies dans des variétés adaptées, en particulier la sphère en haute dimension.

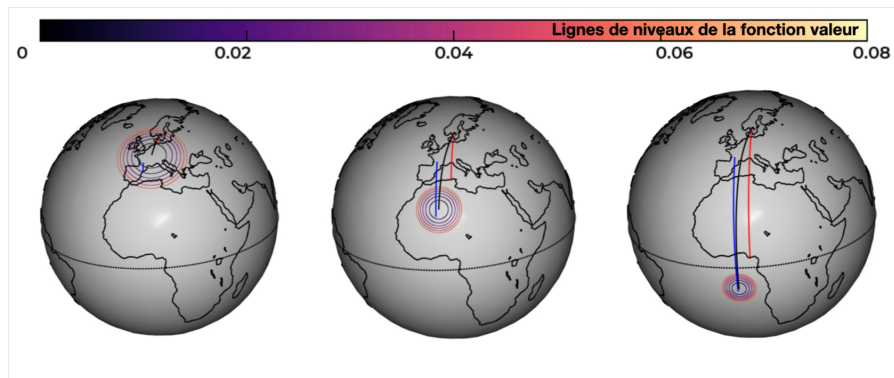


FIGURE 1 – Estimation d'état sur la sphère. L'observateur (en noir) part avec un décalage sur les observations (en bleu) qui ont le bon état initial : Carcans Maubuisson !

- [1] A. Collin, D. Chapelle, P. Moireau. *A luenberger observer for reaction-diffusion models with front position data*. Journal of Computational Physics.
- [2] K. A. van Garderen, S. R. van der Voort, M. M. J. Wijnenga, F. Incekara, G. Kapsas, R. Gahrman, A. Alafandi, M. Smits. *Evaluating glioma growth predictions as a forward ranking problem*, 2022.
- [3] P. Moireau. *Discrete-time formulations as time discretization strategies in data assimilation*. Handbook of Numerical Analysis, 2022.
- [4] R. Mortensen. *Maximum-likelihood recursive nonlinear filtering*. Journal of Optimization Theory and Applications, 1968.