F-équivalence pour les systèmes paraboliques et stabilisation rapide d'EDP non linéaires

Vincent BOULARD, CERMICS - Champs-sur-Marne
Amaury HAYAT, CERMICS - Champs-sur-Marne

Dans cet exposé, nous présentons les résultats de l'article [1], consacré au problème de F-équivalence pour les systèmes paraboliques. Soit A un opérateur sur un espace de Hilbert H et $B \in (D(A'))^k$. Une manière de formuler le problème de F-équivalence pour le système de contrôle (A, B) est la suivante.

Problème 1. *Étant donné un opérateur D générant un semi-groupe exponentiellement stable, peut-on trouver $(T, K) \in \mathcal{GL}(H) \times \mathcal{L}(D(A), \mathbb{C}^k)$ tels que T transforme le système*

$$\partial_t u(t) = Au(t) + BKu(t) \tag{1}$$

en (où $v = Tu$)

$$\partial_t v(t) = Dv(t). \tag{2}$$

Notre résultat principal établit des conditions optimales assurant l'existence d'une solution au problème de F-équivalence si A est un opérateur parabolique à spectre discret (voir [2] pour comparer nos résultats au cadre général actuel).

Théorème 1. *Soit A un opérateur parabolique sur un espace de Hilbert H admettant une base de Riesz formée de vecteurs propres, et $B \in (D(A'))^k$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe un entier $m(\lambda)$ explicitement calculable tel que :*

- *si $k < m(\lambda)$, pour tout opérateur exponentiellement stable D, le problème 1 n'a pas de solution.*
- *si $k \geq m(\lambda)$, et si B satisfait une condition de λ-contrôlabilité approximative, il existe D, T et K explicites, tels que D est exponentiellement stable à vitesse λ et (T, K) est solution de 1.*

La condition de λ-contrôlabilité approximative correspond à la contrôlabilité du système restreint au sous-espace engendré par les modes propres associés aux valeurs propres inférieures ou égales à λ. Par ailleurs, en notant P_λ le projecteur sur cet espace, le D du théorème précédent est donné par (avec $\mu > \lambda$ assez grand)

$$D = (A - \mu)P_\lambda + A(I - P_\lambda). \tag{3}$$

Nous montrons également que la paire (T, K) est unique si et seulement si (A, B) est approximativement contrôlable. Pour finir, nous appliquons ce résultat à la stabilisation de systèmes paraboliques non linéaires, notamment l'équation de Kuramoto-Sivashinsky et l'équation de Fisher-KPP sur une variété compacte, via le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit (A, B) un système de contrôle satisfaisant toutes les hypothèses du cas affirmatif du Théorème 1 ($k \geq m(\lambda)$). On considère le problème de contrôle non linéaire suivant*

$$\partial_t u(t) = Au(t) + \mathcal{F}(u(t)) + Bw(t), \tag{4}$$

où $\mathcal{F}$ vérifie l'hypothèse suivante : il existe $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $\mathcal{F} : H \to D((-A)^{-\gamma})$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall u, v \in H, \quad \|u\|_H, \|v\|_H \leq \delta \implies \|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{D((-A)^{-\gamma})} \leq \varepsilon \|u - v\|_H. \tag{5}$$

Alors, en posant $w(t) = Ku(t)$ où $K \in \mathcal{L}(H; \mathbb{C}^k)$ est donné par le Théorème 1, le système (4) est localement exponentiellement stable dans H.

[1] V. Boulard, A. Hayat. *F-equivalence for parabolic systems and application to the stabilization of nonlinear pde.* Preprint, 2025.

[2] A. Hayat, E. Loko. *Fredholm backstepping and rapid stabilization of general linear systems.* HAL Preprint, 2024.

Contact : `vincent.boulard@enpc.fr`