

Invariant de Lazutkin-Treschev et application à la stabilité d'ondes solitaires

Frédéric CHARDARD, Institut Camille Jordan Université de Jean Monnet - Saint-Étienne.

Laetitia PAOLI, Institut Camille Jordan Université de Jean Monnet - Saint-Étienne.

Nhan Trung TRAN, Institut Camille Jordan Université de Jean Monnet - Saint-Étienne.

Dans ce travail, on s'intéresse à la stabilité spectrale faible des ondes solitaires d'une EDP non linéaire dispersive.

On considérera l'équation de Kawahara en dimension 1 (en temps t et en espace x) qui décrit des couches d'eau soumises à la capillarité et à la gravité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2 \right), \text{ avec } t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

où $u(t, x) \in \mathbb{R}$ est la hauteur d'eau.

On note c la vitesse de propagation d'onde. Dans les variables (t, ξ) avec $\xi = x - ct$, l'onde solitaire est la solution de l'équation stationnaire associée à la nouvelle EDP dans ces variables. Cette équation stationnaire peut s'écrire sous la forme d'une EDO hamiltonienne :

$$\partial_\xi Y = J \nabla H_c(Y), Y \in \mathbb{R}^4, \quad (2)$$

où H_c est le hamiltonien (dépendant de c) et J est matrice symplectique usuelle de $\mathbb{R}^4$. L'existence d'une onde solitaire de l'EDP (1) correspond à l'existence d'une orbite homocline de l'EDO (2). Si on considère l'EDO (2) linéarisée autour de cette orbite homocline, on démontre qu'il existe [1] deux vecteurs $v^\pm(\xi)$ tels que les espaces instable $\mathbb{E}^u$ et stable $\mathbb{E}^s$ sont respectivement :

$\mathbb{E}^u := \{v \text{ solution de l'EDO (2) linéarisée telle que } \lim_{\xi \rightarrow -\infty} v(\xi) = 0_{\mathbb{R}^4} \text{ exponentiellement}\} = \text{Vect}\{\partial_\xi \hat{\gamma}, v^-\}.$

$\mathbb{E}^s := \{v \text{ solution de l'EDO (2) linéarisée telle que } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi) = 0_{\mathbb{R}^4} \text{ exponentiellement}\} = \text{Vect}\{\partial_\xi \hat{\gamma}, v^+\}.$

L'invariant de Lazutkin-Treschev (par rapport à ξ) de l'onde solitaire est défini par $\langle v^-, Jv^+ \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^4$. Il s'agit d'un invariant géométrique lié à la stabilité spectrale [1, 4]. En fonction de la valeur de vitesse de propagation d'onde c , l'EDO (2) peut admettre une infinité d'orbites homoclines [3] correspondant à une infinité d'ondes solitaires de l'EDP (1). Si on note ϕ l'une d'elles, appelée onde primaire, on démontre une relation entre l'invariant de Lazutkin-Treschev de ϕ et l'invariant de Lazutkin-Treschev des autres ondes solitaires [2].

- [1] F. Chardard, T. J. Bridges. *Transversality of homoclinic orbits, the Maslov index and the symplectic Evans function*. Nonlinearity, **28**(1), 77–102, 2015.
- [2] F. Chardard, L. Paoli, N. T. Tran. *Lazutkin-Treschev invariant and application to stability of solitary waves*. En cours de rédaction.
- [3] R. L. Devaney. *Homoclinic orbits in Hamiltonian systems*. J. Differential Equations, **21**(2), 431–438, 1976.
- [4] T. Kapitula, A. Stefanov. *A Hamiltonian-Krein (instability) index theory for solitary waves to KdV-like eigenvalue problems*. Stud. Appl. Math., **132**(3), 183–211, 2014.

Contact : nhan.trung.tran@univ-st-etienne.fr.