Non-atteignabilité certifiée pour systèmes linéaires paraboliques sous contraintes

Ivan HASENOHR, MAP5 - Paris
Camille POUCHOL, MAP5 - Paris
Yannick PRIVAT, IECL - Strasbourg
Christophe ZHANG, INRIA - Paris

Considérons un problème de contrôle linéaire sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t y(t) = Ay(t) + Bu(t), & \forall t \in (0,T), \\ y(0) = y_0 \in X, \\ u(t) \in \mathcal{U}, & \forall t \in (0,T), \end{cases}$$

où X est un espace de Hilbert et $\mathcal{U}$ représente un ensemble de contraintes convexe, fermé et borné. Posons également V espace de Hilbert dense et s'injectant continûment dans X, tel que le domaine de A vérifie $\mathcal{D}(A) \subset V$. En se donnant une cible y_f, il suit d'un argument de séparation que y_f n'est pas atteignable en temps T si et seulement si

$$\exists\, p_f \in X, \quad J(p_f) := \int_0^T \sigma_{\mathcal{U}}(L_T^* p_f(t))\,\mathrm{d}t - \langle y_f, p_f \rangle + \langle y_0, S_T^* p_f \rangle < 0,$$

où S_T et L_T sont respectivement le semi-groupe associé à A et l'opérateur entrée-sortie : $y(T;u) = S_T y_0 + L_T u$, et $\sigma_{\mathcal{U}}$ représente la fonction support de l'ensemble de contraintes. Cette formulation est particulièrement adaptée à une discrétisation numérique dans le but d'une certification rigoureuse.

On suppose A continu et coercif sur V, ainsi que B borné. Sous certaines hypothèses de compatibilité entre A^* et un espace vectoriel de dimension fini $V_h \subset V$, on discrétise J en temps (schéma d'Euler implicite) et en espace (sur V_h), ce qui permet l'obtention de la borne suivante :

$$\forall p_f, p_{fh} \in \mathcal{D}(A^*) \times V_h, \quad e_d(p_f, p_{fh}) := |J(p_f) - J_{\Delta t,h}(p_{fh})| \leq (C_1 \Delta t + C_2 h^2)(\|A^* p_f\|_X + \|p_f - p_{fh}\|_V),$$

où C_1 et C_2 sont des constantes explicites dépendant des divers paramètres du problème. Cette majoration permet d'appliquer une preuve assistée par ordinateur au sens suivant : si l'on arrive à trouver $p_{fh} \in V_h$ et lui associer $p_f \in \mathcal{D}(A^*)$ tels que

$$J_{\Delta t,h}(p_{fh}) + e_d(p_f, p_{fh}) + e_a(p_{fh}) < 0,$$

où $e_a(p_{fh})$ désigne une majoration des erreurs d'arrondis effectuées par le calcul numérique de $J_{\Delta t,h}(p_{fh})$, il s'ensuit que $J(p_f) < 0$ et donc que y_f est non-atteignable en temps T sous contraintes $\mathcal{U}$.

On appliquera cette méthodologie pour montrer la non-atteignabilité de cibles pour le contrôle de l'équation de la chaleur sur [0,1] avec conditions au bord de Dirichlet homogènes, sous différents types de contraintes $\mathcal{U}$, avec B de la forme χ_ω, où $\omega \subset [0,1]$.

Ces résultats sont l'objet de travaux en cours, dans la continuité de [1].

[1] I. Hasenohr, C. Pouchol, Y. Privat, C. Zhang. *Computer-assisted proofs of non-reachability for linear finite-dimensional control systems*, 2024. Working paper or preprint.

Contact : `ivan.hasenohr@math.cnrs.fr`