

Preuves assistées par ordinateur pour l'existence de solution et l'analyse de stabilité dans des systèmes de diffusions croisées

Maxime PAYAN, CMAP - Palaiseau

Maxime BREDEN, CMAP - Palaiseau

Les équations de diffusions croisées à plusieurs espèces constituent des systèmes avec des difficultés de résolution propres à chacun d'eux. Cependant, grâce à des méthodes assistées par ordinateur, on peut établir des propriétés de ces équations, de manière systématique.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur un système de diffusion croisée non linéaire et démontrons l'existence de solutions stationnaires en utilisant un théorème de point fixe, le Théorème de Newton-Kantorovitch.

Le modèle étudié est une équation aux dérivées partielles (EDP) de type Keller-Segel avec diffusion croisée et réaction logistique, décrivant la concentration des cellules (u) et du produit chimique (v). Les solutions stationnaires sont recherchées sous forme de séries de Fourier, reformulant le problème en un système non linéaire. Après avoir posé un espace de solution adéquat et introduit une "boîte à outils" pour gérer les non-linéarités, nous établissons les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de point fixe et obtenons l'existence de nombreux états stationnaires.

Dans un second temps, nous abordons la stabilité des états stationnaires obtenus. Tout d'abord un critère de stabilité "numériquement vérifiable" est établi, puis une méthodologie constructive pour la vérification du critère pour chaque état stationnaire est développé dans un contexte général. Il s'agit ensuite d'appliquer cette méthode pour les états stationnaires obtenus dans la première partie.

Cette approche, combinant théorie et calcul numérique, permet de mieux comprendre les états stationnaires et leur stabilité dans des systèmes de diffusion croisée, ouvrant la voie à des analyses plus approfondies de modèles similaires.

Pour plus de détails, consultez l'article [1] sur la première partie. Un article est en cours sur le travail exposé en deuxième partie.

- [1] M. Breden, M. Payan. *Computer-assisted proofs for the many steady states of a chemotaxis model with local sensing*. Physica D : Nonlinear Phenomena, p. 134221, 2024.

Contact : maxime.payan@polytechnique.edu