Stabilité de l'équation de la poutre d'Euler-Bernoulli sur un réseau étoilé avec amortissement indéfini

Zied BOUALLAGUI, Laboratoire de mathématiques d'Avignon - Avignon

Dans cet exposé, nous allons étudier le problème des vibrations soutenues d'un réseau étoilé composé de trois poutres liées $e_j,\ j=1,2,3$. Le concept de cette étude est d'éliminer le risque d'endommagement dû aux oscillations soutenues au cours du temps. Pour cela, nous avons besoin d'un mécanisme d'amortissement approprié qui conduit à la dissipation de la vibration associée au réseau. Cette action est appelée stabilisation. D'un point de vue mathématique, ces mécanismes d'amortissement sont des termes qui apparaissent dans l'équation ou dans les conditions aux limites. Dans la plupart des travaux, les mathématiciens prennent ces termes d'amortissement comme des fonctions qui satisfont certaines conditions de positivité. Mais dans ce travail, on s'intéresse à prendre ces termes d'amortissement de signe indéfini (change de signe). Après avoir formulé mathématiquement le problème, la question qui nous intéresse est de savoir quel type de propriété ce mécanisme de dissipation doit vérifier pour conduire à la stabilité du système.
On considère que le mouvement de chaque arête e_j du réseau est décrit par la fonction $u^j(x,t)$ qui satisfait l'équation de poutre d'Euler-Bernoulli suivante :

$$\frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^4 u^j}{\partial x^4}(x,t) + a_j(x)\frac{\partial u^j}{\partial t}(x,t) = 0,\ x \in (0,1), t > 0,$$

avec les termes d'amortissement $a_j(x),\ j=1,2,3$. On suppose que le réseau est à extrémités articulées, c'est-à-dire, $u^j(1,t)=0,\ \dfrac{\partial^2 u^j}{\partial x^2}(1,t)=0,\ j=1,2,3$. Pour que le réseau reste en cohésion, les conditions de continuité et de transmission suivantes doivent être vérifiées : $u^i(0,t) = u^1(0,t),\ \dfrac{\partial^2 u^i}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}(0,t),\ i=2,3$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u^i}{\partial x}(0,t)=0,\ \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^3 u^i}{\partial x^3}(0,t)=0.$

Les conditions initiales sont données par : $u^i(x,0)=u_0^i(x),\ \dfrac{\partial u^i}{\partial t}(x,0)=u_1^i(x),\ i=1,2,3.$

La première étape est consacrée à la formulation du système en un problème de Cauchy $\dfrac{dU}{dt}(t) = (\mathcal{A}+\mathcal{B}_a)\,U(t)$, avec $\mathcal{A}$ est un opérateur non borné et $\mathcal{B}_a$ est un opérateur borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ à préciser, où $\mathcal{B}_a$ porte les coefficients d'amortissement $a_i(x),\ i=1,2,3$. Dans la deuxième étape, en se basant sur la théorie des semi-groupes et les résultats de perturbation, on montre que l'opérateur $\mathcal{A}+\mathcal{B}_a$ est le générateur d'un C_0-groupe avec résolvante compacte. On en déduit alors l'existence et l'unicité de la solution du problème (PC), et que le spectre $\sigma(\mathcal{A}+\mathcal{B}_a)$ de l'opérateur $\mathcal{A}+\mathcal{B}_a$ est uniquement constitué de valeurs propres isolées de multiplicités algébriques finies. La troisième étape est consacrée à l'étude de la distribution spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}+\mathcal{B}_a$. Ensuite, après avoir déterminé les expressions asymptotiques des valeurs propres, on en déduit que l'axe imaginaire n'est pas une asymptote du spectre et que les hautes fréquences propres sont distribuées dans une bande parallèle et à gauche de l'axe imaginaire. Enfin, dans la dernière étape, nous présentons une discussion concernant la stabilité du système selon les propriétés des coefficients d'amortissement.

Les résultats de cette étude sont détaillés dans :
Bouallagui, Z., & Jellouli, M. (2025). Stability of Euler-Bernoulli beam equation on a star-shaped network with indefinite damping. Applicable Analysis, 1–23. Doi : 10.1080/00036811.2025.2468518

Contact : ziedbouallagui0528@gmail.com