Chemins gourmands dans un environnement poissonien

Julien VERGES, Institut Denis Poisson - Tours

Alice participe à une chasse aux oeufs de Pâques assez inhabituelle : elle est la seule participante, mais n'a droit qu'à un temps $T > 0$ pour récolter les oeufs. Par ailleurs, elle connaît à l'avance les positions des oeufs, qui sont distribués comme un certain processus ponctuel. On peut montrer [4] que si elle suit une stratégie optimale, alors le nombre $\mathrm{M}(T)$ d'oeufs ramassés satisfait une loi des grands nombres : il existe une constante déterministe $\mathbf{M}$ telle que

$$\frac{\mathrm{M}(T)}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{\text{p.s. et } \mathrm{L}^1} \mathbf{M}.$$

Ajoutons maintenant une nouvelle règle : étant donné $0 \leq \beta < 1$ fixé, Alice doit se trouver au point $(\beta T, 0)$ à l'instant T. Notons $\mathrm{M}_\beta(T)$ le nombre d'oeufs récoltés avec cette contrainte supplémentaire. Il existe une constante déterministe $\mathbf{M}_\beta$ telle que

$$\frac{\mathrm{M}_\beta(T)}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{\text{p.s. et } \mathrm{L}^1} \mathbf{M}_\beta. \tag{1}$$

Par ailleurs la fonction $\beta \mapsto \mathbf{M}_\beta$ est décroissante et concave sur $[0, 1[$. Dans le cas particulier où les oeufs sont disposés selon un *processus de Poisson* (i.e. lorsque les restrictions du processus sur deux domaines disjoints sont indépendantes), on peut prouver [3] des propriétés de régularité plus fines sur cette fonction. Cela repose sur la stabilité des processus de Poisson par rapport à certaines opérations, en particulier les transformations affines du plan.
Après avoir défini formellement le problème, je donnerai quelques éléments de preuve pour (1), qui sont similaires dans l'esprit aux arguments utilisés par Cox-Gandolfi-Griffin-Kesten [1, 2] pour l'étude de la version discrète, historique, du modèle. Puis j'expliquerai comment les propriétés de stabilité des processus de Poisson permettent de raffiner ce résultat.

[1] J. Cox, A. Gandolfi, P. Griffin, H. Kesten. *Greedy lattice animals i : Upper bounds.* The Annals of Applied Probability, **3**, 1993. doi :10.1214/aoap/1177005277.

[2] A. Gandolfi, H. Kesten. *Greedy lattice animals ii : Linear growth.* The Annals of Applied Probability, **4(1)**, 76–107, 1994.

[3] J. Verges. *Law of large numbers for greedy animals and paths in a Poissonian environment.* `https://arxiv.org/abs/2410.15771`, 2024.

[4] J. Verges. *Law of large numbers for greedy animals and paths in an ergodic environment.* `https://arxiv.org/abs/2409.14773`, 2024.

Contact : `julien.verges@univ-tours.fr`