

Résultats de monotonie pour les solutions de l'équation de Poisson non-linéaire dans des épigraphes

Nicolas BEUVIN, LAMFA - Amiens

Dans cet exposé, je m'intéresse à la monotonie des solutions strictement positives de l'équation de Poisson non-linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où Ω est l'épigraphe d'une fonction **minorée** $g : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, i.e,

$$\Omega := \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N, x_N > g(x')\}, \quad (2)$$

et $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction (globalement ou localement) Lipschitzienne avec

$$f(0) \geq 0. \quad (3)$$

Ce problème a déjà été étudié dans certains cas : le cas du demi-espace, c'est-à-dire avec $g \equiv 0$ ([1],[6],[7]), dans le cas coercif, ([5]) ou encore dans le cas d'un épigraphe globalement Lipschitzien (pas forcément minoré) mais avec une non-linéarité f très particulière ([2]). Dans ces travaux, les auteurs ont démontrés que les solutions du problème 1 sont strictement croissantes dans la direction x_N (i.e $\frac{\partial u}{\partial x_N} > 0$ dans Ω).

Ici, à l'aide de la méthode du moving plane (introduite par J.Serrin) adaptée à la géométrie particulière des épigraphes, je vais démontrer des nouveaux résultats de monotonie ($\frac{\partial u}{\partial x_N} > 0$ dans Ω) pour des solutions de (1) (non nécessairement bornées) sous les conditions générales (2), (3).

Enfin, je parlerai des conséquences de ces nouveaux résultats, en particulier sur la classification des solutions bornées du problème 1.

Ces résultats (voir [3],[4]) ont été établis dans le cadre de ma thèse, dirigée par Mr Alberto Farina, professeur au LAMFA-UPJV

Références

- [1] H. BERESTYCKI, L.A. CAFFARELLI, L. NIRENBERG. *Symmetry for elliptic equations in the halfspace*. In Boundary value problems for PDEs and applications. Vol. dedicated to E. Magenes, J. L. Lions et al., ed. Masson, Paris, 1993, 27-42.
- [2] H. BERESTYCKI, L.A. CAFFARELLI, L. NIRENBERG. *Monotonicity for elliptic equations in an unbounded Lipschitz domain*. Comm. Pure Appl. Math. 50, 1089-1111 (1997).
- [3] N. BEUVIN, A. FARINA, B. SCIUNZI *Monotonicity for solutions to semilinear problems in epigraphs*. arXiv :2502.04805.
- [4] N. BEUVIN, A. FARINA *Serrin's overdetermined problems on epigraphs*. arXiv 2502.04812
- [5] M.J. ESTEBAN, P.-L. LIONS. *Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh (1982), 1-14.
- [6] A. FARINA. *Some results about semilinear elliptic problems on half-spaces*. Mathematics in Engineering 2020, Volume 2, Issue 4 : 709-721 Special Issue : Contemporary PDEs between theory and modeling - Dedicated to Sandro Salsa, on the occasion of his 70th birthday.
- [7] A. FARINA, B. SCIUNZI. *Monotonicity and symmetry of nonnegative solutions to $-\Delta u = f(u)$ in half-planes and strips*. Adv. Nonlinear Stud. 17 (2017), no. 2, 297-310.

Contact : nicolas.beuvin@u-picardie.fr