Discrétisation Galerkin Discontinue Non-Polynomiale pour les Problèmes d'Advection-Diffusion et Oseen

Mayssa MROUEH, LDEL, LAGA - Saclay **Erell JAMELOT**, LDEL - Saclay
Pascal OMNES, LCAN, LAGA - Saclay

Au laboratoire LDEL, nous développons des méthodes numériques pour simuler des écoulements de fluides incompressibles faiblement visqueux, dont le comportement est modélisé par les équations de Navier-Stokes. Cependant, nous sommes confrontés à des problèmes de précision lorsque la viscosité cinématique est très faible. Pour résoudre ce problème, nous étudions d'abord le cas de l'advection-diffusion, puis le problème d'Oseen, avant d'aborder les équations de Navier-Stokes.
Le problème d'advection-diffusion est décrit par l'équation :

$$-\nu\Delta u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

avec des conditions aux limites appropriées. Le champ scalaire u représente la solution, le paramètre ν représente le coefficient de diffusion, le paramètre $\mathbf{b}$ représente le champ de transport. La donnée f représente un terme source. Nous supposons que la champ $\mathbf{b}$ est constant. Lorsque ν est très petit par rapport à $\mathbf{b}$, le terme d'advection domine. Dans le cas d'une discrétisation par la méthode des éléments finis, cela peut entraîner des oscillations numériques.
Classiquement, lorsqu'on discrétise un problème avec la méthode des éléments finis, on utilise des fonctions de base polynomiales par morceaux. Bien que ces bases offrent plusieurs avantages, elles présentent certaines limitations, dont l'apparition d'oscillations lorsque la viscosité est très faible. Dans ce contexte, il est essentiel de respecter le rapport $\frac{\|\mathbf{b}\|h}{\nu} < c$, avec $c = 2$ en dimension 1, ce qui s'avère particulièrement coûteux en terme de nombre de degrés de liberté, par exemple lorsque $\nu = 10^{-6}$ et $\|\mathbf{b}\|$ d'ordre 1.
Dans cet exposé, nous proposons d'étudier la méthode de Galerkin discontinue SIP [1], en intégrant aux bases locales des fonctions exponentielles.
Le choix des bases est inspiré par la solution analytique de l'équation d'advection-diffusion en dimension $d = 1$, que nous généraliserons aux dimensions $d = 2$ et $d = 3$. Cette approche permet d'améliorer la précision de l'approximation tout en réduisant les oscillations numériques associées aux phénomènes de convection dominante.
Il existe peu de références traitant de l'utilisation de bases exponentielles pour discrétiser l'équation de convection-diffusion. Dans [2], les auteurs considèrent un maillage cartésien et des fonctions de bases continues, exponentielles par morceaux.
Cette étude sera illustrée par des expériences numériques pour les problèmes d'advection-diffusion et d'Oseen en dimension 2, appliqués à plusieurs cas tests physiques et benchmarks de référence. Ces expériences permettent d'évaluer l'efficacité de cette nouvelle base en termes de stabilité, précision et coût de calcul. Nous comparerons les résultats avec ceux obtenus dans le cas classique (méthode de Galerkin discontinue SIP avec fonctions de base polynomiales). Dans les cas présentés, l'utilisation d'une base non polynomiale est avantageuse.

[1] D. A. Di Pietro, A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, vol. 69. Springer, Mathématiques & Applications, 2012.

[2] Y. Shih, J.-Y. Cheng, K.-T. Chen. *An exponential-fitting finite element method for convection–diffusion problems.* Applied Mathematics and Computation, **217**, 5798–5809, 2011.

Contact : mayssa.mroueh@cea.fr