Nonlinear manifold approximation using compositional polynomial networks

Antoine BENSALAH, Airbus - Paris, France
Anthony NOUY, LMJL, Centrale Nantes, Nantes Universitté - Nantes, France
Joel SOFFO, Airbus - LMJL - Paris, France

Version française

Dans cet exposé, nous présenterons une nouvelle méthode de réduction de dimension non linéaire. Plus précisement, nous considérerons le problème de l'approximation d'un sous-ensemble M d'un espace de Hilbert X par une variété de basse dimension M_n, en utilisant des échantillons de M. M_n est défini comme l'image d'un décodeur non linéaire lisse D défini sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace linéaire éventuellement de haute dimension X_N, et un encodeur linéaire E qui associe à un élément de M ses coefficients $E(u)$ sur une base d'un sous-espace de dimension n $X_n \subset X_N$, où X_n et X_N sont des espaces linéaires optimaux ou quasi-optimaux, dépendamment de la mesure d'erreur choisie. La linéarité de l'encodeur permet d'obtenir facilement les paramètres $E(u)$ associés à un élément donné u dans M. Le décodeur proposé est une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^n$ à X_N qui obtenue par une composition arborescente de fonctions polynomiales, estimées séquentiellement à partir d'échantillons dans M. Des analyses rigoureuses d'erreur et de stabilité sont fournies, ainsi qu'une stratégie adaptative pour la construction du décodeur, garantissant une approximation de l'ensemble M avec des erreurs (en norme 2 ou infini) controlées, ainsi qu'un contrôle de stabilité (continuité de Lipschitz) de la paire encodeur/décodeur. Nous illustrerons par la fin la capacité de la méthode à travers différentes équations aux dérivées partielles, telles que l'équation de Korteweg-de Vries, ou encore l'équation de Burgers.
Cette présentation a pour réference l'article [1].

English version

In this talk, we will present a new method for nonlinear reduced order modeling (dimensionality reduction). More precisely, we will consider the problem of approximating a subset M of a Hilbert space X by a low-dimensional manifold M_n, using samples from M. M_n is defined as the range of a smooth nonlinear decoder D defined on $\mathbb{R}^n$ with values in a possibly high-dimensional linear space X_N, and a linear encoder E which associates to an element from M its coefficients $E(u)$ on a basis of a n-dimensional subspace $X_n \subset X_N$, where X_n and X_N are optimal or near to optimal linear spaces, depending on the selected error measure. The linearity of the encoder allows to easily obtain the parameters $E(u)$ associated with a given element u in M. The proposed decoder is a polynomial map from $\mathbb{R}^n$ to X_N which is obtained by a tree-structured composition of polynomial maps, estimated sequentially from samples in M. Rigorous error and stability analyses are provided, as well as an adaptive strategy for constructing a decoder that guarantees an approximation of the set M with controlled mean-squared or wort-case errors, and a controlled stability (Lipschitz continuity) of the encoder and decoder pair. The performance of the method is demonstrated on different partial differential equations, such as Korteweg-de Vries equation and Burgers equation.
This presentation is based on our work [1].

[1] A. Bensalah, A. Nouy, J. Soffo. *Nonlinear manifold approximation using compositional polynomial networks*, 2025.

Contact : `joel.soffo@ec-nantes.fr`