Limite en grande population de modèles de particules non échangeables : exemple avec le modèle de Cucker-Dong

Adrien Cotil

En collaboration avec Nathalie Ayi et Fanny Delebecque.

SORBONNE UNIVERSITÉ

Email adress : adrien.cotil@sorbonne-universite.fr.

Plan

1. Motivation
2. Notion de Graphon
3. Équation de Vlasov non échangeable

Plan

1 Motivation

2 Notion de Graphon

3 Équation de Vlasov non échangeable

Modèle de Cucker-Dong non échangeable

Modèle de Cucker-Dong non échangeable: Modèle d'alignement + attraction / répulsion.

F. Cucker and J.-G. Dong., "A general collision-avoiding flocking framework", 2011, *IEEE transactions on automatic control*.

Modèle de Cucker-Dong non échangeable

Modèle de Cucker-Dong non échangeable: Modèle d'alignement + attraction / répulsion.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} A_{ij}^N \psi(\|x_i - x_j\|)\Gamma(v_j - v_i) + \dfrac{\sigma\left(v^N\right)^{2\alpha-1}}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|)(x_i - x_j). \end{cases}$$

F. Cucker and J.-G. Dong., "A general collision-avoiding flocking framework", 2011, *IEEE transactions on automatic control*.

Modèle de Cucker-Dong non échangeable

Modèle de Cucker-Dong non échangeable: Modèle d'alignement + attraction / répulsion.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} A_{ij}^N \psi(\|x_i - x_j\|)\Gamma(v_j - v_i) + \dfrac{\sigma\left(v^N\right)^{2\alpha-1}}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|)(x_i - x_j). \end{cases}$$

Hypothèses:

- Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma(-v) = -\Gamma(v)$ et $v \cdot \Gamma(v) \geq C\|v\|^2$ (Cucker-Smale : $\Gamma(v) = v$).

F. Cucker and J.-G. Dong., "A general collision-avoiding flocking framework", 2011, *IEEE transactions on automatic control*.

Modèle de Cucker-Dong non échangeable

Modèle de Cucker-Dong non échangeable: Modèle d'alignement + attraction / répulsion.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} A_{ij}^N \psi(\|x_i - x_j\|)\Gamma(v_j - v_i) + \dfrac{\sigma\left(v^N\right)^{2\alpha-1}}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|)(x_i - x_j). \end{cases}$$

Hypothèses:

- Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma(-v) = -\Gamma(v)$ et $v \cdot \Gamma(v) \geq C\|v\|^2$ (Cucker-Smale : $\Gamma(v) = v$).
- $\sigma\left(v^N\right)^2 := \frac{1}{N}\sum_i \|v_i\|^2 - \left\|\frac{1}{N}\sum_i v_i\right\|^2$ (variance en vitesse).

F. Cucker and J.-G. Dong., "A general collision-avoiding flocking framework", 2011, *IEEE transactions on automatic control*.

Modèle de Cucker-Dong non échangeable

Modèle de Cucker-Dong non échangeable: Modèle d'alignement + attraction / répulsion.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} A_{ij}^N \psi(\|x_i - x_j\|)\Gamma(v_j - v_i) + \dfrac{\sigma\left(v^N\right)^{2\alpha-1}}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi(\|x_i - x_j\|)(x_i - x_j). \end{cases}$$

Hypothèses:

- Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $\Gamma(-v) = -\Gamma(v)$ et $v \cdot \Gamma(v) \geq C\|v\|^2$ (Cucker-Smale : $\Gamma(v) = v$).
- $\sigma\left(v^N\right)^2 := \frac{1}{N}\sum_i \|v_i\|^2 - \left\|\frac{1}{N}\sum_i v_i\right\|^2$ (variance en vitesse).

Question: Quel sens donner à la limite en grande population de ce modèle ?

F. Cucker and J.-G. Dong., "A general collision-avoiding flocking framework", 2011, *IEEE transactions on automatic control*.

Modèle particulaire à champ moyen

Modèle de particules échangeables:

$$\dot{z}_i = F\left[\mu_t^N\right](z_i), \quad \mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{z_i(t)}. \tag{MF}$$

Modèle particulaire à champ moyen

Modèle de particules échangeables:

$$\dot{z}_i = F\left[\mu_t^N\right](z_i), \quad \mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{z_i(t)}. \tag{MF}$$

$\hookrightarrow$ $\mu_t^N(E)$ = "proportion de particules i dont l'état z_i est dans E".

Modèle particulaire à champ moyen

Modèle de particules échangeables:

$$\dot{z}_i = F\left[\mu_t^N\right](z_i), \quad \mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{z_i(t)}. \tag{MF}$$

$\hookrightarrow \mu_t^N(E) =$ "proportion de particules i dont l'état z_i est dans E".

Exemple avec Cucker-Dong échangeable: $A_{ij} = 1$

Modèle particulaire à champ moyen

Modèle de particules échangeables:

$$\dot{z}_i = F\left[\mu_t^N\right](z_i), \quad \mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{z_i(t)}. \tag{MF}$$

$\hookrightarrow \mu_t^N(E) =$ "proportion de particules i dont l'état z_i est dans E".

Exemple avec Cucker-Dong échangeable: $A_{ij} = 1$

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = L\left[\mu_t^N\right](x_i, v_i),$$

Modèle particulaire à champ moyen

Modèle de particules échangeables:

$$\dot{z}_i = F\left[\mu_t^N\right](z_i), \quad \mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{z_i(t)}. \tag{MF}$$

$\hookrightarrow \mu_t^N(E) =$ "proportion de particules i dont l'état z_i est dans E".

Exemple avec Cucker-Dong échangeable: $A_{ij} = 1$

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = L\left[\mu_t^N\right](x_i, v_i),$$

$$L[\mu](x,v) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(\|x-y\|)\Gamma(w-v)\, d\mu(y,w) + \sigma_v(\mu)^{2\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(\|x-y\|)(x-y)\, d\mu(y,w),$$

Modèle particulaire à champ moyen

Modèle de particules échangeables:

$$\dot{z}_i = F\left[\mu_t^N\right](z_i), \quad \mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{z_i(t)}. \tag{MF}$$

$\hookrightarrow \mu_t^N(E) =$ "proportion de particules i dont l'état z_i est dans E".

Exemple avec Cucker-Dong échangeable: $A_{ij} = 1$

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = L\left[\mu_t^N\right](x_i, v_i),$$

$$L[\mu](x,v) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(\|x-y\|)\Gamma(w-v)\, d\mu(y,w) + \sigma_v(\mu)^{2\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(\|x-y\|)(x-y)\, d\mu(y,w),$$

$$\sigma_v(\mu)^2 = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \|w\|^2\, d\mu(y,w) - \left\| \int_{\mathbb{R}^{2d}} w\, d\mu(y,w) \right\|^2.$$

Modèle cinétique à champ moyen

Équation cinétique:

$$\partial_t \mu_t + \boldsymbol{\nabla} \cdot (F[\mu_t]\, \mu_t) = 0, \qquad \text{(KMF)}$$

Modèle cinétique à champ moyen

Équation cinétique:

$$\partial_t \mu_t + \boldsymbol{\nabla} \cdot (F[\mu_t]\, \mu_t) = 0, \tag{KMF}$$

i.e. pour toute fonction test $\varphi : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$,

$$\partial_t \int \varphi \, d\mu_t = \int (F[\mu_t] \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi) \, d\mu_t.$$

Modèle cinétique à champ moyen

Équation cinétique:

$$\partial_t \mu_t + \boldsymbol{\nabla} \cdot (F[\mu_t]\, \mu_t) = 0, \qquad \text{(KMF)}$$

i.e. pour toute fonction test $\varphi : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$,

$$\partial_t \int \varphi \, d\mu_t = \int (F[\mu_t] \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi) \, d\mu_t.$$

$\hookrightarrow$ $t \mapsto (z_i(t))_{i \in \{1,\dots,N\}}$ solution de (MF) alors $t \mapsto \mu_t^N$ solution de (KMF).

Modèle cinétique à champ moyen

Équation cinétique:

$$\partial_t \mu_t + \boldsymbol{\nabla} \cdot (F[\mu_t]\, \mu_t) = 0, \qquad \text{(KMF)}$$

i.e. pour toute fonction test $\varphi : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$,

$$\partial_t \int \varphi \, d\mu_t = \int (F[\mu_t] \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi) \, d\mu_t.$$

$\hookrightarrow$ $t \mapsto (z_i(t))_{i \in \{1,\dots,N\}}$ solution de (MF) alors $t \mapsto \mu_t^N$ solution de (KMF).

Question: $\mu_0^N \to \mu_0 \implies \mu_t^N \to \mu_t$ où $(\mu_t)_{t \geq 0}$ solution de (KMF) ?

Limite en champ moyen

Stabilité: $(\mu_t)_{t\geq 0}$ et $(\nu_t)_{t\geq 0}$ sont solutions de (KMF) alors

$$d(\mu_t, \nu_t) \leq \lambda(t) d(\mu_0, \nu_0),$$

où d distance sur l'ensemble des mesures de probabilité.

Limite en champ moyen

Stabilité: $(\mu_t)_{t\geq 0}$ et $(\nu_t)_{t\geq 0}$ sont solutions de (KMF) alors

$$d(\mu_t, \nu_t) \leq \lambda(t) d(\mu_0, \nu_0),$$

où d distance sur l'ensemble des mesures de probabilité.

Exemples de distance: Bounded Lipschitz (Fortet-Mourier), Wasserstein, Variation totale, ...

Limite en champ moyen

Stabilité: $(\mu_t)_{t\geq 0}$ et $(\nu_t)_{t\geq 0}$ sont solutions de (KMF) alors

$$d(\mu_t, \nu_t) \leq \lambda(t) d(\mu_0, \nu_0),$$

où d distance sur l'ensemble des mesures de probabilité.

Exemples de distance: Bounded Lipschitz (Fortet-Mourier), Wasserstein, Variation totale, ...

Cas non échangeable:

Limite en champ moyen

Stabilité: $(\mu_t)_{t\geq 0}$ et $(\nu_t)_{t\geq 0}$ sont solutions de (KMF) alors

$$d(\mu_t, \nu_t) \leq \lambda(t) d(\mu_0, \nu_0),$$

où d distance sur l'ensemble des mesures de probabilité.

Exemples de distance: Bounded Lipschitz (Fortet-Mourier), Wasserstein, Variation totale, ...

Cas non échangeable:

- Comment généraliser la notion de "limite en champ moyen" au cas non échangeable ?

Limite en champ moyen

Stabilité: $(\mu_t)_{t\geq 0}$ et $(\nu_t)_{t\geq 0}$ sont solutions de (KMF) alors

$$d(\mu_t, \nu_t) \leq \lambda(t) d(\mu_0, \nu_0),$$

où d distance sur l'ensemble des mesures de probabilité.

Exemples de distance: Bounded Lipschitz (Fortet-Mourier), Wasserstein, Variation totale, ...

Cas non échangeable:

- Comment généraliser la notion de "limite en champ moyen" au cas non échangeable ?
- Quel sens donner à $\lim_{N\to+\infty} A^N$?

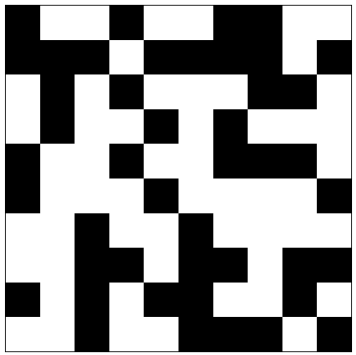
Plan

1 Motivation

2 Notion de Graphon

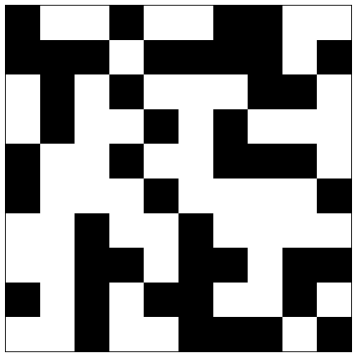
3 Équation de Vlasov non échangeable

Intuition

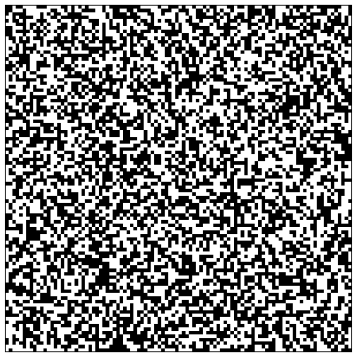


$N = 10$

Intuition

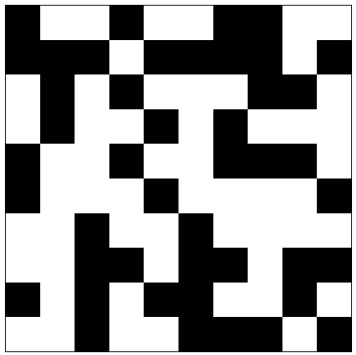


$N = 10$

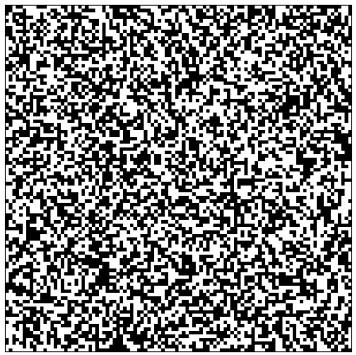


$N = 100$

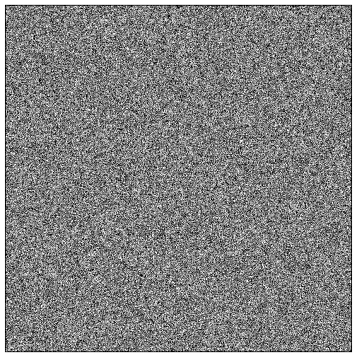
Intuition



$N = 10$

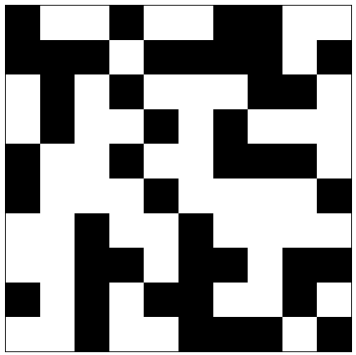


$N = 100$

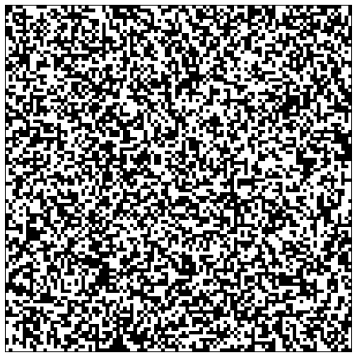


$N = 1000$

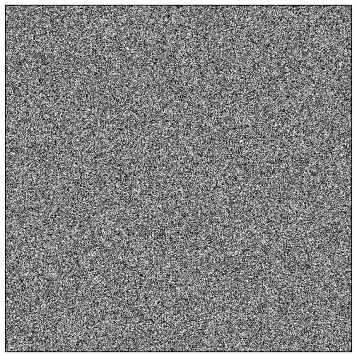
Intuition



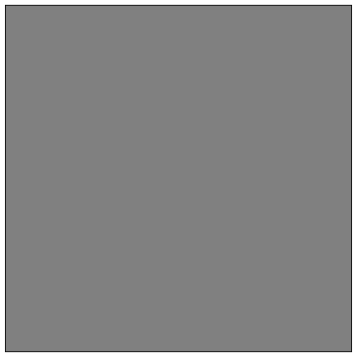
$N = 10$



$N = 100$



$N = 1000$



$N = \infty$

Isométrie matrice graphon

Isométrie matrice graphon:

$$a_N(\xi,\zeta) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^N \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}]}(\xi)\mathbb{1}_{(\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}]}(\zeta).$$

Isométrie matrice graphon

Isométrie matrice graphon:

$$a_N(\xi,\zeta) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^N \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}]}(\xi)\mathbb{1}_{(\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}]}(\zeta).$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

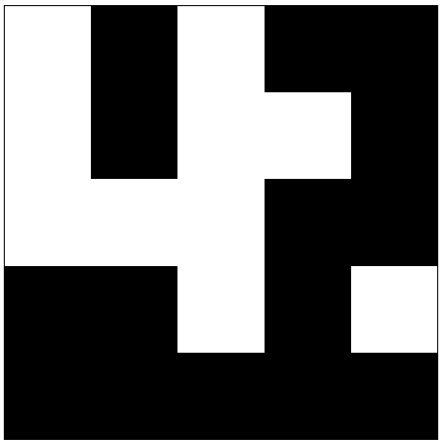
Isométrie matrice graphon

Isométrie matrice graphon:

$$a_N(\xi,\zeta) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^N \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}]}(\xi)\mathbb{1}_{(\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}]}(\zeta).$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$



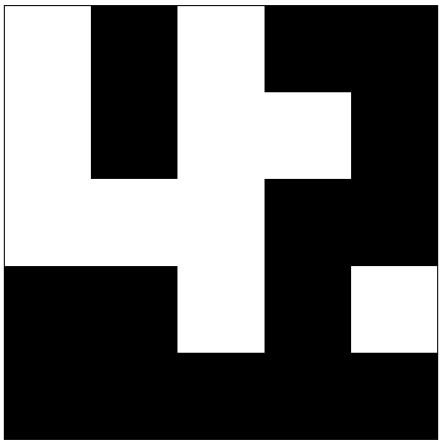
Isométrie matrice graphon

Isométrie matrice graphon:

$$a_N(\xi,\zeta) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^N \mathbb{1}_{\left(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right]}(\xi)\mathbb{1}_{\left(\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\right]}(\zeta).$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto$$



$A^N \mapsto a_N$ est une isométrie de $\left(\mathbb{R}_+^{N\times N}, \|\cdot\|_p\right)$ dans $L^p\left([0,1]^2, \mathbb{R}_+\right)$.

Notion de graphon

Ensemble des noyaux: $\mathcal{A} = L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}_+)$.

L. Lovász, "Large networks and graph limits", 2012, *American Mathematical Soc.*,

Notion de graphon

Ensemble des noyaux: $\mathcal{A} = L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}_+)$.

$\hookrightarrow$ Problème : Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\infty = 1/2$.

L. Lovász, "Large networks and graph limits", 2012, *American Mathematical Soc.*,

Notion de graphon

Ensemble des noyaux: $\mathcal{A} = L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}_+)$.

$\hookrightarrow$ Problème : Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\infty = 1/2$.

Cut-distance: $\|A - B\|_\square = \max_{Q,R\in\{1,\dots,N\}} \frac{1}{N^2} \left|\sum_{i\in Q}\sum_{j\in R}(A_{ij} - B_{ij})\right|$

L. Lovász, "Large networks and graph limits", 2012, *American Mathematical Soc.*,

Notion de graphon

Ensemble des noyaux: $\mathcal{A} = L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}_+)$.

$\hookrightarrow$ Problème : Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\infty = 1/2$.

Cut-distance: $\|A - B\|_\square = \max_{Q,R\in\{1,\dots,N\}} \frac{1}{N^2} \left|\sum_{i\in Q}\sum_{j\in R}(A_{ij} - B_{ij})\right|$

$\hookrightarrow$ Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\square \to 0$.

L. Lovász, "Large networks and graph limits", 2012, *American Mathematical Soc.*,

Notion de graphon

Ensemble des noyaux: $\mathcal{A} = L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}_+)$.

$\hookrightarrow$ Problème : Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\infty = 1/2$.

Cut-distance: $\|A - B\|_\square = \max_{Q,R\in\{1,\dots,N\}} \frac{1}{N^2} \left|\sum_{i\in Q}\sum_{j\in R}(A_{ij} - B_{ij})\right|$

$\hookrightarrow$ Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\square \to 0$.

Ensembles des graphons: $W = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_\square)$

L. Lovász, "Large networks and graph limits", 2012, *American Mathematical Soc.*,

Notion de graphon

Ensemble des noyaux: $\mathcal{A} = L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}_+)$.

$\hookrightarrow$ Problème : Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\infty = 1/2$.

Cut-distance: $\|A - B\|_\square = \max_{Q,R\in\{1,\dots,N\}} \frac{1}{N^2} \left|\sum_{i\in Q}\sum_{j\in R}(A_{ij} - B_{ij})\right|$

$\hookrightarrow$ Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\square \to 0$.

Ensembles des graphons: $W = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_\square)$ où

$$\|a - b\|_\square = \sup_{P,Q\in\mathcal{L}([0,1])} \left|\int_{P\times Q} (a(\xi,\zeta) - b(\xi,\zeta))\, d\zeta d\xi\right|,$$

L. Lovász, "Large networks and graph limits", 2012, *American Mathematical Soc.*,

Notion de graphon

Ensemble des noyaux: $\mathcal{A} = L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R}_+)$.

$\hookrightarrow$ Problème : Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\infty = 1/2$.

Cut-distance: $\|A - B\|_\square = \max_{Q,R\in\{1,\dots,N\}} \frac{1}{N^2} \left|\sum_{i\in Q}\sum_{j\in R}(A_{ij} - B_{ij})\right|$

$\hookrightarrow$ Si $A_{ij}^N \sim \mathcal{B}(1/2)$ alors $\left\|A^N - 1/2\right\|_\square \to 0$.

Ensembles des graphons: $W = (\mathcal{A}, \|\cdot\|_\square)$ où

$$\|a - b\|_\square = \sup_{P,Q\in\mathcal{L}([0,1])} \left|\int_{P\times Q} (a(\xi,\zeta) - b(\xi,\zeta))\, d\zeta d\xi\right|,$$

$A^N \mapsto a_N$ est une isométrie de $\left(\mathbb{R}_+^{N\times N}, \|\cdot\|_\square\right)$ dans W.

L. Lovász, "Large networks and graph limits", 2012, *American Mathematical Soc.*,

Plan

1 Motivation

2 Notion de Graphon

3 Équation de Vlasov non échangeable

Formulation type champ-moyen de Cucker-Dong

Mesure empirique: $\mu_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{i/N, x_i(t), v_i(t)}$.

Formulation type champ-moyen de Cucker-Dong

Mesure empirique: $\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{i/N, x_i(t), v_i(t)}$.

$\hookrightarrow \mu_t^N(J \times E) =$ "proportion de particules i dont le label i/N est dans J et dont l'état (x_i, v_i) est dans E".

Formulation type champ-moyen de Cucker-Dong

Mesure empirique: $\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{i/N, x_i(t), v_i(t)}$.

$\hookrightarrow \mu_t^N(J \times E) =$ "proportion de particules i dont le label i/N est dans J et dont l'état (x_i, v_i) est dans E".

Modèle de Cucker-Dong:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = L\left[\mu_t^N, a_N\right](i/N, x_i, v_i). \end{cases}$$

Formulation type champ-moyen de Cucker-Dong

Mesure empirique: $\mu_t^N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{i/N, x_i(t), v_i(t)}$.

$\hookrightarrow \mu_t^N(J \times E) =$ "proportion de particules i dont le label i/N est dans J et dont l'état (x_i, v_i) est dans E".

Modèle de Cucker-Dong:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = L\left[\mu_t^N, a_N\right](i/N, x_i, v_i). \end{cases}$$

où

$$L[\mu, a](\xi, x, v) = \int_{[0,1]\times\mathbb{R}^{2d}} a(\xi,\zeta)\psi(\|x-y\|)\Gamma(w-v)\, d\mu(\zeta, y, w) + \sigma_v(\mu)^{2\alpha-1} \int_{[0,1]\times\mathbb{R}^{2d}} \phi(\|x-y\|)(x-y)\, d\mu(\zeta, y, w).$$

Equation de Vlasov non échangeable

Équation de Vlasov non échangeable:

$$\partial_t \mu_t + v \cdot \nabla_x \mu_t + \nabla_v \cdot (L[\mu_t, a]\mu_t) = 0, \qquad \text{(VNE)}$$

Equation de Vlasov non échangeable

Équation de Vlasov non échangeable:

$$\partial_t \mu_t + v \cdot \nabla_x \mu_t + \nabla_v \cdot (L[\mu_t, a]\mu_t) = 0, \qquad \text{(VNE)}$$

i.e. pour toute fonction test $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$,

$$\partial_t \int \varphi \, d\mu_t = \int \left(v \cdot \nabla_x \varphi + L[\mu_t, a] \cdot \nabla_v \varphi\right) \, d\mu_t.$$

Equation de Vlasov non échangeable

Équation de Vlasov non échangeable:

$$\partial_t \mu_t + v \cdot \nabla_x \mu_t + \nabla_v \cdot (L[\mu_t, a]\mu_t) = 0, \qquad \text{(VNE)}$$

i.e. pour toute fonction test $\varphi : [0,1] \times \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$,

$$\partial_t \int \varphi \, d\mu_t = \int (v \cdot \nabla_x \varphi + L[\mu_t, a] \cdot \nabla_v \varphi) \, d\mu_t.$$

Question: Quelle notion de limite en champs moyen / stabilité pour (VNE) ?

Espace de probabilité fibré

Invariance des labels: μ_t solution de (VNE) $\implies$ π_t marginal de μ_t sur $[0,1]$ constante (absence de mutations / naissances et morts).

Espace de probabilité fibré

Invariance des labels: μ_t solution de (VNE) $\implies$ π_t marginal de μ_t sur $[0,1]$ constante (absence de mutations / naissances et morts).

Espace des solutions: $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}))$

Espace de probabilité fibré

Invariance des labels: μ_t solution de (VNE) $\implies$ π_t marginal de μ_t sur $[0,1]$ constante (absence de mutations / naissances et morts).

Espace des solutions: $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}))$

$$\mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}) = \left\{ \nu \in \mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d}) \;\middle|\; J \subset [0,1],\ \nu(J \times \mathbb{R}^{2d}) = \pi(J) \right\}.$$

Espace de probabilité fibré

Invariance des labels: μ_t solution de (VNE) $\implies$ π_t marginal de μ_t sur $[0,1]$ constante (absence de mutations / naissances et morts).

Espace des solutions: $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}))$

$$\mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}) = \left\{ \nu \in \mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d}) \;\middle|\; J \subset [0,1],\ \nu(J \times \mathbb{R}^{2d}) = \pi(J) \right\}.$$

Théorème de désintégration: Si $\nu \in \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d})$ alors $d\nu = d\nu^\xi \otimes d\pi(\xi)$, i.e.

$$\nu(J \times E) = \int_J \nu^\xi(E)\, d\pi(\xi).$$

Espace de probabilité fibré

Invariance des labels: μ_t solution de (VNE) $\implies$ π_t marginal de μ_t sur $[0,1]$ constante (absence de mutations / naissances et morts).

Espace des solutions: $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}))$

$$\mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}) = \left\{ \nu \in \mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d}) \;\middle|\; J \subset [0,1],\ \nu(J \times \mathbb{R}^{2d}) = \pi(J) \right\}.$$

Théorème de désintégration: Si $\nu \in \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d})$ alors $d\nu = d\nu^\xi \otimes d\pi(\xi)$, i.e.

$$\nu(J \times E) = \int_J \nu^\xi(E)\, d\pi(\xi).$$

$\hookrightarrow \mu_t^{N,\xi}(E) =$ "proportion de particules i dont le label est ξ et dont l'état (x_i, v_i) est dans E".

Espace de probabilité fibré

Invariance des labels: μ_t solution de (VNE) $\implies$ π_t marginal de μ_t sur $[0,1]$ constante (absence de mutations / naissances et morts).

Espace des solutions: $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}))$

$$\mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d}) = \left\{ \nu \in \mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d}) \;\middle|\; J \subset [0,1],\ \nu(J \times \mathbb{R}^{2d}) = \pi(J) \right\}.$$

Théorème de désintégration: Si $\nu \in \mathcal{P}^\pi(I \times \mathbb{R}^{2d})$ alors $d\nu = d\nu^\xi \otimes d\pi(\xi)$, i.e.

$$\nu(J \times E) = \int_J \nu^\xi(E)\, d\pi(\xi).$$

$\hookrightarrow$ $\mu_t^{N,\xi}(E)$ = "proportion de particules i dont le label est ξ et dont l'état (x_i, v_i) est dans E".

Question: $\mu_0^{N,\xi} \to \mu_0^\xi$ et $a_N \to a$ $\implies$ $\mu_t^{N,\xi} \to \mu_t^\xi$ où $(\mu_t)_{t\geq 0}$ solution de (VNE) ?

Limite en champ moyen non échangeable

Problème: Si d est une distance sur $\mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d})$ alors (en général)

$$d(\mu^N, \mu) \to 0 \implies d(\mu^{N,\xi}, \mu^{\xi}) \to 0.$$

J. Peszek and D. Poyato, "Heterogeneous gradient flows in the topology of fibered optimal transport", 2023, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*.

Limite en champ moyen non échangeable

Problème: Si d est une distance sur $\mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d})$ alors (en général)

$$d(\mu^N, \mu) \to 0 \implies d(\mu^{N,\xi}, \mu^\xi) \to 0.$$

Distance sur $\mathcal{P}^\pi$:

$$d^\pi(\mu_t, \nu_t) = \int_0^1 d\left(\mu_t^\xi, \nu_t^\xi\right) d\pi(\xi).$$

J. Peszek and D. Poyato, "Heterogeneous gradient flows in the topology of fibered optimal transport", 2023, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*.

Limite en champ moyen non échangeable

Problème: Si d est une distance sur $\mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d})$ alors (en général)

$$d(\mu^N, \mu) \to 0 \implies d(\mu^{N,\xi}, \mu^\xi) \to 0.$$

Distance sur $\mathcal{P}^\pi$:

$$d^\pi(\mu_t, \nu_t) = \int_0^1 d\left(\mu_t^\xi, \nu_t^\xi\right) d\pi(\xi).$$

$\hookrightarrow$ Si $d^\pi\left(\mu^N, \mu\right) \to 0$ alors $d\left(\mu^{N,\xi}, \mu^\xi\right) \to 0$ pour π presque tout ξ.

J. Peszek and D. Poyato, "Heterogeneous gradient flows in the topology of fibered optimal transport", 2023, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*.

Limite en champ moyen non échangeable

Problème: Si d est une distance sur $\mathcal{P}(I \times \mathbb{R}^{2d})$ alors (en général)

$$d(\mu^N, \mu) \to 0 \implies d(\mu^{N,\xi}, \mu^\xi) \to 0.$$

Distance sur $\mathcal{P}^\pi$:

$$d^\pi(\mu_t, \nu_t) = \int_0^1 d\left(\mu_t^\xi, \nu_t^\xi\right) d\pi(\xi).$$

$\hookrightarrow$ Si $d^\pi\left(\mu^N, \mu\right) \to 0$ alors $d\left(\mu^{N,\xi}, \mu^\xi\right) \to 0$ pour π presque tout ξ.

Stabilité: $(\mu_t)_{t\geq 0}$ et $(\nu_t)_{t\geq 0}$ sont solutions de (VNE) pour a et b alors

$$d^\pi(\mu_t, \nu_t) \leq \lambda(t)\left(d^\pi(\mu_0, \nu_0) + \|a - b\|_\square\right).$$

J. Peszek and D. Poyato, "Heterogeneous gradient flows in the topology of fibered optimal transport", 2023, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*.

Cas de Cucker-Dong cinétique non échangeable

Théorème (Ayi, C., Delebecque)

- *L'équation* (VNE) *admet une unique solution globale pour* $a \in W$ *et* μ_0 *à support compact.*
- *Si* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *et* $(\nu_t)_{t\geq 0}$ *sont deux solutions de* (VNE) *alors*

$$\mathcal{W}_2^{\pi}(\mu_t, \nu_t) \leq \lambda(t) \left(\mathcal{W}_2^{\pi}(\mu_0, \nu_0) + \sqrt{\|a - b\|_{\square}} \right).$$

Perspectives

- Cas avec des mutations / naissances et morts ?
- Cas de particules non collisionnantes ?
- Comportement en temps long de (VNE) en fonction de la structure de a ?