

Contrôlabilité exacte frontière pour une équation des ondes semi-linéaire

Sue CLARET, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal - Clermont-Ferrand
Jérôme LEMOINE, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal - Clermont-Ferrand
Arnaud MÜNCH, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal - Clermont-Ferrand

Soit Ω un ouvert bornée de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, de classe \mathcal{C}^2 , et soit $T > 0$. On définit $Q_T := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$, et Γ_0 un sous-ensemble non vide de $\partial\Omega$. On considère l'équation des ondes semi-linéaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_{tt}y - \Delta y + f(y) = 0 & Q_T, \\ y = v \mathbf{1}_{\Gamma_0} & \Sigma_T, \\ (y(\cdot, 0), \partial_t y(\cdot, 0)) = (u_0, u_1) & \Omega, \end{cases} \quad (\star)$$

où $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ sont les données initiales du système, $v \in L^2(\Sigma_T)$ est une fonction contrôle et f est une fonction continue sur \mathbb{R} . On désigne par $\mathbf{1}_{\Gamma_0} : \partial\Omega \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de Γ_0 et Δ représente l'opérateur Laplacien avec des conditions aux limites de Dirichlet. Dans cette présentation, on s'intéresse au problème de contrôlabilité exacte associé à (\star) :

Étant donné $T > 0$, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, pour toutes données initiales (u_0, u_1) et finales (z_0, z_1) dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, trouver $v \in L^2(\Sigma_T)$ et $y \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ solution de (\star) tel que $(y(\cdot, T), \partial_t y(\cdot, T)) = (z_0, z_1)$ dans Ω .

On introduit les notations suivantes :

$$\ln_+(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } |r| < 1, \\ \ln |r| & \text{sinon,} \end{cases}$$

et ν désigne le vecteur normal unitaire extérieur à un point de $\partial\Omega$. Le résultat principal est donné ci-dessous.

Théorème 1. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$, on pose $\Gamma_1 := \{x \in \partial\Omega : (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0\}$ et $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ tel que $\text{dist}(\Gamma_1, \partial\Omega \setminus \Gamma_0) > 0$, et on considère $T > 2 \max_{x \in \overline{\Omega}} |x - x_0|$.*

— On suppose l'existence de $p \in [0, 3/2[$ tel que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifie

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta > 0, \quad |f(r)| \leq \alpha_1 + |r| (\alpha_2 + \beta \ln_+^p |r|), \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Si β est assez petit, alors pour toutes données initiales (u_0, u_1) et finales (z_0, z_1) dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, le système (\star) est exactement contrôlable au temps T avec des contrôles dans $L^2(\Sigma_T)$.

— On suppose l'existence de $p \in [0, 3/2[$ tel que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifie

$$\exists \alpha, \beta > 0, \quad |f'(r)| \leq \alpha + \beta \ln_+^p |r|, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Si β est assez petit, alors pour toutes données initiales (u_0, u_1) et finales (z_0, z_1) dans $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on peut construire une suite $(y_k, v_k)_{k \in \mathbb{N}^}$ qui converge vers une paire état-contrôle (y, v) pour (\star) .*

En particulier, nous présenterons quelques éléments de la preuve basée sur des arguments de point-fixe.