Approximation numérique de l'émergence de transition de phase en dynamique collective

Pierre DEGOND, Institut de Mathématiques de Toulouse - Toulouse
Sara MERINO-ACEITUNO, Universität Wien - Wien
Léo MEYER, Universität Wien - Wien

Le but de cet exposé est de présenter quelques résultats numériques autour d'un modèle de dynamique collective présentant un phénomène de transition de phase. On se donne une collection de particules décrites par leurs positions et directions $(x_k, \omega_k)_{k=1,\dots,N}$ et évoluant selon le modèle de Vicsek :

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \omega_k, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega_k}{\mathrm{d}t} = P_{\omega_k^\perp}(\nu(|J_k|)\bar{\omega}_k \mathrm{d}t + \sqrt{2\tau(|J_k|)}\mathrm{d}B_k(t)), \tag{2}$$

où $J_k = \frac{1}{N}\sum_{j\neq k} K(|x_j - x_k|)\omega_j, \bar{\omega}_k = \frac{J_k}{|J_k|}$. À partir des limites champs-moyen et hydrodynamique de ce modèle, on obtient le **modèle d'autoorganisation hydrodynamique** qui en chaque point $x \in \mathbb{R}^d$ au temps t, donne la densité de particule $\rho(t,x)$ et la direction moyenne des particules $\Omega(t,x)$. Ce modèle a la particularité de présenter une transition de phase en fonction de la valeur de ρ :

Théorème 1 ([1])**.** *Soit $\rho > 0$. On definit $\rho_* = \inf_{\kappa\in(0,\kappa_{max}]} \frac{j(\kappa)}{c(\kappa)} = \inf_{|J|>0} \frac{|J|}{c(k(|J|))}$, où $\kappa_{max} = \lim_{|J|\to\infty} k(|J|)$, $k(|J|) = \frac{\nu(|J|)}{\tau(|J|)}$ et j est l'inverse de k.*

(i) Si $\rho < \rho_*$, la seule solution d'équilibre ayant pour masse totale ρ est la distribution uniforme $f = \rho$.

(ii) Si $\rho > \rho_*$, il y existe au moins une famille de solution d'équilibre non-isotrope $\{\rho M_{\kappa\Omega}, \Omega \in \mathbb{S}^{d-1}\}$.

Dans la région $\rho > \rho_*$, on obtient le modèle d'autoorganisation hydrodynamique :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho c_1(\rho)\Omega) = 0, & \text{(3a)} \\ \rho(\partial_t \Omega + c_2(\rho)(\Omega\cdot\nabla_x)\Omega) + \Theta(\rho)P_{\Omega^\perp}\nabla_x\rho = \mathcal{K}_2\delta(\rho)P_{\Omega^\perp}\Delta_x(\rho c_1\Omega). & \text{(3b)} \end{cases}$$

Dans la région $\rho < \rho_*$, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = 0, & \text{(4a)} \\ \Omega = 0. & \text{(4b)} \end{cases}$$

Dans cet exposé, je présenterai un méta-modèle capable de représenter les deux régions de la transition de phase sans avoir besoin de suivre l'évolution de l'interface $\{f = \rho_*\}$. Différentes simulations numériques seront également présentées, mettant en lumière les différentes propriétés du modèle, telles que l'hyperbolicité dans certaines gammes de paramètres et une comparaison avec le modèle de particules.

[1] P. Degond, A. Frouvelle, J.-G. Liu. *Phase transitions, hysteresis, and hyperbolicity for self-organized alignment dynamics.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **216(1)**, 63–115, 2015.

Contact : leo.meyer@math.cnrs.fr