

Couplage de modèles hydrostatique et non-hydrostatique de circulation océanique

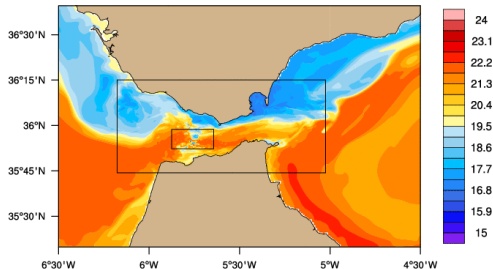
Pierre Lozano
avec Eric Blayo et Laurent Debreu

3 juin 2025





- Fluide stratifié
- Ondes, courants, températures...
- Hypothèse hydrostatique $\frac{H}{L} \ll 1$
- Coût élevé → adaptation locale de la physique → couplage





- Écriture unifiée δ_{NB} , δ_{NH} et δ_{SL} . Stratification N^2 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \delta_{\text{NH}} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial z} + g\rho' = 0 \\ \delta_{\text{NB}} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\delta_{\text{NB}}}{c_s^2} \frac{\partial p'}{\partial t} - \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{N^2}{g} w = 0 \end{array} \right.$$

- conditions aux limites verticales :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = 0 \quad \text{en } z = -H \\ \delta_{\text{SL}} \frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad \text{en } z = 0 \\ p' = g\eta \quad \text{en } z = 0 \quad \text{si } \delta_{\text{SL}} = 1 \end{array} \right.$$

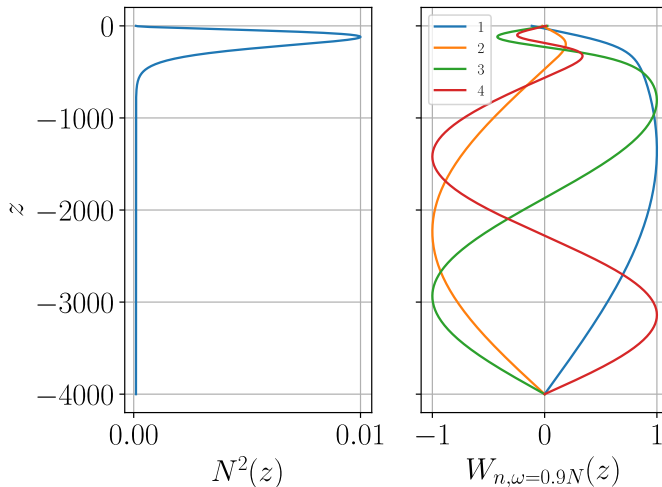


- Solutions sous la forme d'ondes $w(x, z, t) = e^{i(k_x x - \omega t)} W(z) \exp\left(-\frac{\delta_{NB}}{2} \int_0^z \frac{dz'}{D(z')}\right)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} W''(z) + \left(\lambda (N^2(z) - \delta_{NH} \omega^2) + \frac{\delta_{NB}}{2} \left(\frac{1}{D(z)} \right)' - \frac{\delta_{NB}}{4D^2(z)} + \delta_{NB} \delta_{NH} \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) W(z) = 0 \\ W(-H) = 0 \\ W(0) = \delta_{SL} \frac{W'(0)}{g\lambda - \frac{\delta_{NB}}{2D(0)}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \frac{1}{D(z)} = \frac{N^2(z)}{g} + \delta_{NB} \frac{g}{c_s^2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{k_x^2}{\omega^2}$$

- Sturm-Liouville $\rightarrow$ couples $(W_{n,\omega}, \lambda_{n,\omega})$ solutions. Vitesses $c_{n,\omega} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,\omega}}}$.

Modes verticaux en incompressible





- intérieure :

$$k_z^2 - \frac{k_x^2}{\omega^2} (N_0^2 - \delta_{\text{NH}} \omega^2) - \delta_{\text{NH}} \delta_{\text{NB}} \frac{\omega^2}{c_s^2} + \frac{\delta_{\text{NB}}}{4D_0^2} = 0$$

- extérieure :

$$\frac{\tan(k_z H)}{k_z H} = \frac{\delta_{\text{SL}}}{gH \frac{k_x^2}{\omega^2} - \delta_{\text{NB}} \frac{H}{2D_0}}$$



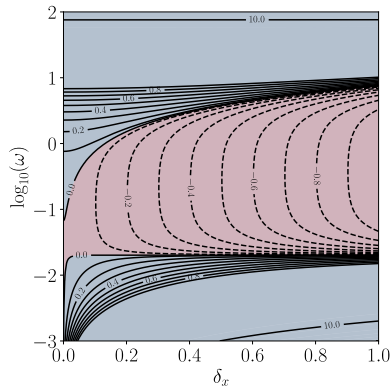
- intérieure :

$$k_z^2 - \frac{k_x^2}{\omega^2} (N_0^2 - \delta_{\text{NH}} \omega^2) - \delta_{\text{NH}} \delta_{\text{NB}} \frac{\omega^2}{c_s^2} + \frac{\delta_{\text{NB}}}{4D_0^2} = 0$$

- extérieure :

$$\frac{\tan(k_z H)}{k_z H} = \frac{\delta_{\text{SL}}}{gH \frac{k_x^2}{\omega^2} - \delta_{\text{NB}} \frac{H}{2D_0}}$$

- Remarques : $\omega^{nh} \leq N_0$ et $\omega^h \geq \omega^{nh}$.





- Par principe de superposition :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,\omega}(\mathbf{x}, t) W'_{n,\omega}(z) \\ w(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} w_{n,\omega}(\mathbf{x}, t) W_{n,\omega}(z) \\ \rho'(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho_{n,\omega}(\mathbf{x}, t) \frac{N^2(z)}{g} W_{n,\omega}(z) - \delta_{\text{NH}} \frac{1}{g} \frac{\partial w_{n,\omega}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) W_{n,\omega}(z) \\ p'(\mathbf{x}, t) = \int_{\omega \in \mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_{n,\omega}} \rho_{n,\omega}(\mathbf{x}, t) W'_{n,\omega}(z) \end{array} \right.$$



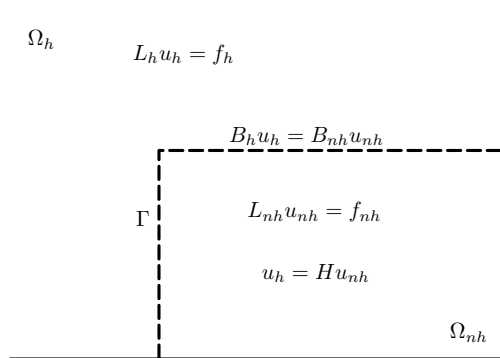
- Système 1D (x, t) proche des équations de type *shallow water*

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{n,\omega}}{\partial t} + g \frac{\partial \rho_{n,\omega}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho_{n,\omega}}{\partial t} + \frac{1}{g\lambda_{n,\omega}} \frac{\partial u_{n,\omega}}{\partial x} + \delta_{\text{NH}} \frac{1}{N_0^2} \frac{1}{g\lambda_{n,\omega}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_{n,\omega}}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

- La relation de dispersion associée est, approximativement :

$$\omega \simeq c_{n,\omega} k_{x,n,\omega} \left(1 - \delta_{\text{NH}} \frac{c_{n,\omega}^2 k_{x,n,\omega}^2}{2N_0^2} \right)$$

→ Korteweg-de Vries

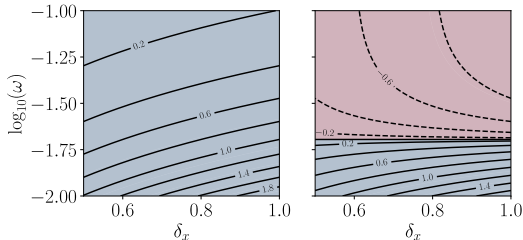


- Opérateur intérieur L : filtrage
- Opérateur d'interface B : couche absorbante (PML)
- Conserver l'énergie ?



On liste ici des aspects qui pourraient *a priori* poser problème :

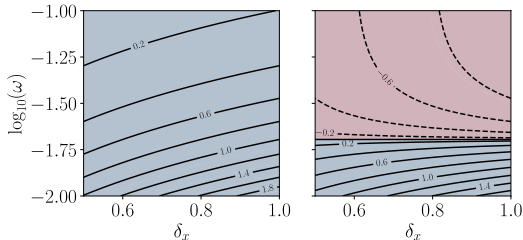
- Relations de dispersion distinctes :
 - $\omega^{nh} < \omega^h$: distorsion
 - $\omega^{nh} < N_0$: réflexion
- Variables différentes : conditions interface et conservation de l'énergie
- Différence d'échelle résolue
- Choix numériques



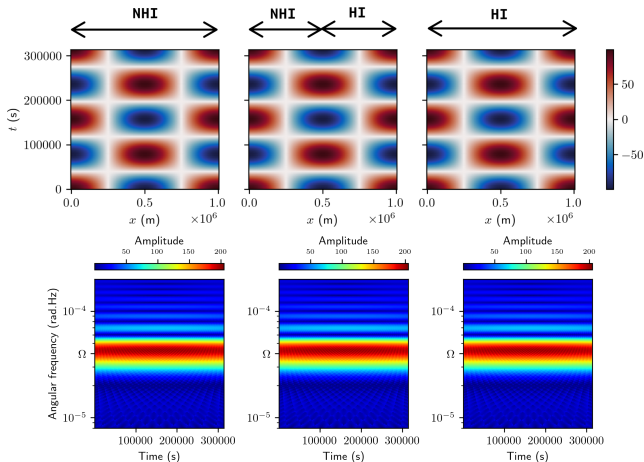


On liste ici des aspects qui pourraient *a priori* poser problème :

- Relations de dispersion distinctes :
 - $\omega^{nh} < \omega^h$: distorsion
 - $\omega^{nh} < N_0$: réflexion
- Variables différentes : conditions interface et conservation de l'énergie
- Différence d'échelle résolue
- Choix numériques



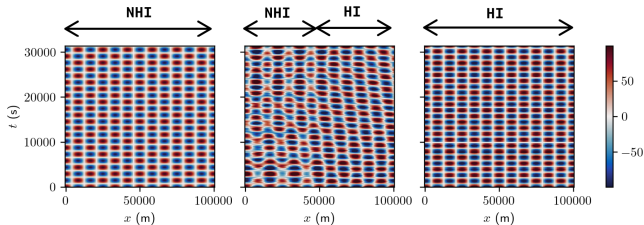
Constatons les dégâts sur un couplage simple avec des conditions de Dirichlet.



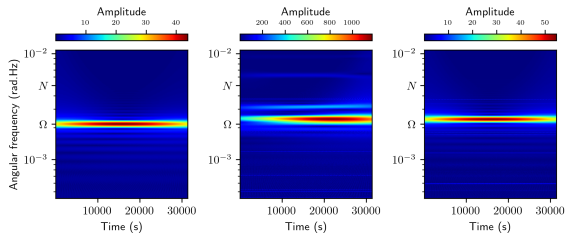
- Diagramme (x, t) de p'_H à la surface

- Scalogramme associé

$$\text{Cas } \frac{k_x}{|k_z|} = 0.008$$



- Diagramme (x, t) de p'_H à la surface



- Scalogramme associé

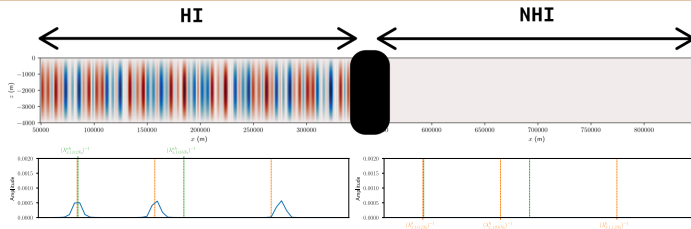
$$\text{Cas } \frac{k_x}{|k_z|} = 0.48$$

Propagation et spectre spatial de ρ'

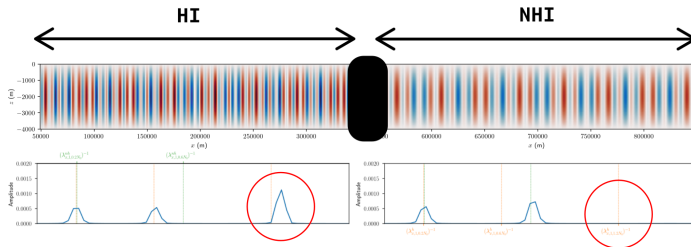


11

- $t = 0.15T$



- $t = 0.6T$

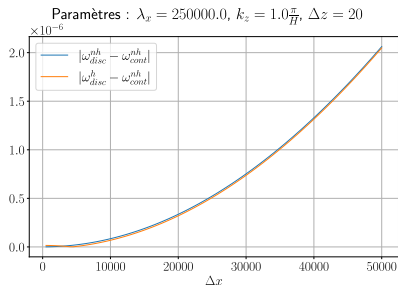




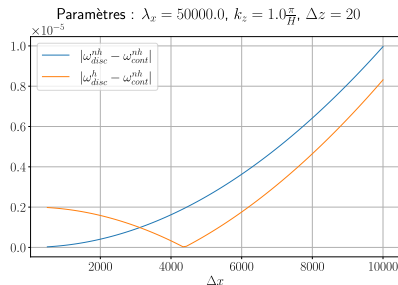
$$\omega_{cont}^2 = \frac{N_0^2 k_x^2}{k_z^2 + k_x^2} \quad V.S. \quad \omega_{disc}^2 = \cos\left(k_z \frac{\Delta z}{2}\right)^2 \frac{N_0^2 \left(\frac{\sin(k_x \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sin(k_z \frac{\Delta z}{2})}{\frac{\Delta z}{2}}\right)^2 + \delta_{NH} \left(\frac{\sin(k_x \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2}$$



$$\omega_{cont}^2 = \frac{N_0^2 k_x^2}{k_z^2 + k_x^2} \quad V.S. \quad \omega_{disc}^2 = \cos\left(k_z \frac{\Delta z}{2}\right)^2 \frac{N_0^2 \left(\frac{\sin(k_x \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sin(k_z \frac{\Delta z}{2})}{\frac{\Delta z}{2}}\right)^2 + \delta_{NH} \left(\frac{\sin(k_x \frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^2}$$



(a) Cas hydro $\omega_{cont}^2 = 10^{-9} s^{-2}$



(b) Cas non hydro $\omega_{cont}^2 = 2.5 \times 10^{-8} s^{-2}$



- Filtrage de la solution hydrostatique



- Filtrage de la solution hydrostatique
- Conservation de l'énergie

- Filtrage de la solution hydrostatique
- Conservation de l'énergie
- Couche absorbante sans réflexion : Perfectly Matched Layers

